CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR
martie 2016

MATEMATICĂ- proba individuală
CLASA a VIII-a
BAREM

SUBIECTUL I : Determinaţi numerele naturale x şi n, cu $x<n$ astfel încât:

$$\left(x^2+2x+1\right)^2+\left(x^2+3x+2\right)^2+\left(x^2+4x+3\right)^2+\ldots+\left(x^2+(n+1)x+n\right)^2=2016.$$

BAREM:

$(x+1)^2(x+1)^2+(x+1)^2(x+2)^2+..+(x+1)^2(x+n)^2=2016$ ...5p.

$(x+1)^2\left[(x+1)^2+(x+2)^2+..+(x+n)^2\right]=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ ...5p.

$(x+1)^2\in\left\{1^2,2^2,3^2,4^2,6^2,12^2\right\}$ ...2p.

$(x+1)^2=1^2\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=2016$ nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale ...2p.

$(x+1)^2=2^2\Rightarrow 2^2+3^2+\ldots+(1+n)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1=504$ nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale ...2p

$(x+1)^2=3^2\Rightarrow 3^2+4^2+\ldots+(2+n)^2=\dfrac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6}-5=224$ nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale ...2p

$(x+1)^2=4^2\Rightarrow x=3, n=4$ soluţie a ecuaţiei ...5p.

Celelalte cazuri nu se verifică (*x* este prea mare si nu s-ar verifica $x<n$) ...2p.

SUBIECTUL II : Se consideră numărul $n=1^2+3^2+5^2+\ldots+2013^2$. Arătaţi că:

a. n nu este pătrat perfect.

b. numărul $A=9n^4-2n^2-7$ este divizibil cu 512.

BAREM:

a. $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=M_8+1$, pentru orice număr natural *k* ...5p.

$n=M_8+1007=M_8+7=M_4+3$, deci n nu este pătrat perfect ...8p.

(justificarea faptului că numerele de forma 4k+3 sau 8k+7 nu sunt pătrate perfecte se punctează cu 2p din cele 8p)

b. $A=9n^4-2n^2-7=(n^2-1)(9n^2+7)$ ...4p.

Cum $n=M_8+7\Rightarrow n^2=M_{16}+1\Rightarrow n^2=16p+1$ ...4p.

$A=256p(9p+1)$, iar p şi $9p+1$ au parităţi diferite deci A este divizibil cu 512 ...4p.

SUBIECTUL III : Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ şi $Q \in B'O$, astfel încât $m(\sphericalangle(B'C;(B'BD))) = m(\sphericalangle(QA;A'C'))$.

a. Arătați că $BQ \perp (ACB')$

b. Arătaţi că punctele B, Q, D' sunt coliniare dacă şi numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

BAREM:

a) $m\left(\widehat{CB';(BDD')}\right) = m\left(\widehat{CB';B'O}\right) = m\left(\widehat{CB'O}\right)$ ...3p

$m\left(\widehat{AQ;A'C'}\right) = m\left(\widehat{AQ;AC}\right) = m\left(\widehat{QAC}\right)$ 3p

In $\Delta AB'C$: $AQ \cap B'C = \{S\}, \sphericalangle QB`S \equiv \sphericalangle QAO, \sphericalangle AQO \equiv \sphericalangle B`QS \Rightarrow m(\sphericalangle AOQ) = m(\sphericalangle QSB`) = 90°$

$\Rightarrow$ AS-înălţime $\Rightarrow Q - ortocentru$ ...2p.

$AC \perp B'O; AC \perp BO \Rightarrow AC \perp (BOB') \Rightarrow AC \perp BQ(1)$ ...3p

$B'C \perp AQ; B'C \perp AB \Rightarrow B'C \perp (ABQ) \Rightarrow B'C \perp BQ(2)$ ...3p

Din (1) si (2) $BQ \perp (ACB')$ ...1p

b) $D', Q, B - coliniare \Rightarrow ABCDA'B'C'D' - cub$

$\Delta D'QB' \sim BQO \Rightarrow \frac{B'Q}{QO} = \frac{D'B'}{BO} = 2 \Rightarrow Q -$ centru de greutate al $\Delta ACB'$ ...3p

$\Delta B'AC - isoscel$, ortocentrul coincide cu centrul de greutate $\Rightarrow \Delta B'AC$-echilateral, deci

$ABCDA'B'C'D' - cub$ ...2p

$ABCDA'B'C'D' - cub \Rightarrow D', Q, B - coliniare$ 5p

SUBIECTUL IV : Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura *a*. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $AE + CF = EF$.

a. Să se calculeze măsura unghiului diedru format de planele $(D`DE)$ şi $(D`DF)$

b. Să se calculeze distanţa de la $D`$ la EF .

BAREM:

a. $m(\sphericalangle(D`DE),(D`DF)) = m(\sphericalangle FDE)$ ...3p.

Prelungim segmentul [BA] cu [AH], AH=CF

$\Delta AHD \equiv \Delta CFD \Rightarrow \sphericalangle HDA \equiv \sphericalangle FDC, DH = DF$ ...3p.

Din congruenţa $\sphericalangle HDA \equiv \sphericalangle FDC \Rightarrow m(\sphericalangle HDF) = 90°$ ...3p.

$\Delta DHE \equiv \Delta DFE \Rightarrow \sphericalangle EDH \equiv \sphericalangle FDE$ ...3p.

Finalizare: $m(\sphericalangle(D`DE),(D`DF)) = m(\sphericalangle FDE) = 45°$ ...2p.

b. Fie $DP \perp EF, D`D \perp (ABC), DP \subset (ABC), EF \subset (ABC) \Rightarrow D`P \perp EF \Rightarrow d(D`, EF) = D`P$ ...5p.

$\Delta DAE \equiv \Delta DPE \Rightarrow DP = DA = a$ ...3p.

Finalizare, calcularea lui $D`P = a\sqrt{2}$ ... 3p.