CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2017

BAREME- CLASA a IX a
proba de matematică individual

Problema 1

Dacă $a,b,c \in R_+^*$ si $a+b+c=1$ arătăți că:

a). $(a+bc)(b+ac)(c+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

b). $\left(\dfrac{a}{bc}+1\right)\left(\dfrac{b}{ac}+1\right)\left(\dfrac{c}{ab}+1\right)\geq 64$

Barem problema 1

a). $a+b+c=1$. Înmulțim relatia cu b și adunăm cu c și obținem

$ab+c=(b+c)(1-b)\Rightarrow ab+c=(b+c)(a+c)$ și analoagele (10p)

Obținerea egalității (3p)

b).Folosind punctul precedent inegalitatea este echivalenta cu

$\left[\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right]^2 \geq 64$ (7p)

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ și analoagele (3p)

Înlocuirea și obținerea inegalității (2p)

Problema 2

Fie M un punct în interiorul ΔABC neisoscel de laturi a,b,c cu G centrul de greutate al triunghiului și I centrul cercului înscris.

a)Demonstrați că $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{A_{\Delta ABM}+A_{\Delta ACM}}{A_{\Delta BCM}}$ unde $\{D\}=AM\cap BC$.

b)Demonstrați ca M,G,I sunt coliniare dacă și numai dacă

$(b-c)A_{\Delta BCM}+(c-a)A_{\Delta CAM}+(a-b)A_{\Delta ABM}=0$

Barem problema 2

a).Din $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta BMD}}=k$ si $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{A_{\Delta AMC}}{A_{\Delta CMD}}=k$ (7p)

si $A_{\Delta BCM}=A_{\Delta BMD}+A_{\Delta CMD}$ rezulăa cerința (3p) b).Daca $BT \perp AD, CQ \perp AD \ (T, Q \in AD) \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BT}{CQ} = \dfrac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta ACM}} = p$ (7p)

$\vec{OM} = \dfrac{1}{k+1}\vec{OA} + \dfrac{k}{k+1}\vec{OD}$ si $\vec{OD} = \dfrac{1}{p+1}\vec{OB} + \dfrac{p}{p+1}\vec{OC}$ avem

$\vec{OM} = \dfrac{A_{\Delta BCM}}{A_{\Delta ABC}}\vec{OA} + \dfrac{A_{\Delta ACM}}{A_{\Delta ABC}}\vec{OB} + \dfrac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta ABC}}\vec{OC}$ (3p)

Cum $\vec{OI} = \dfrac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \dfrac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \dfrac{c}{a+b+c}\vec{OC}$ si $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ rezultă

$\vec{GM} = \dfrac{A_{\Delta BCM} - A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta ABC}}\vec{GA} + \dfrac{A_{\Delta ACM} - A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta ABC}}\vec{GB}$

$\vec{GI} = \dfrac{a-c}{a+b+c}\vec{GA} + \dfrac{b-c}{a+b+c}\vec{GB}$ (3p)

M,G,I coliniare $\Leftrightarrow \vec{GM}$ si $\vec{GI}$ coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{A_{\Delta BCM} - A_{\Delta ABM}}{a-c} = \dfrac{A_{\Delta ACM} - A_{\Delta ABM}}{b-c}$

rezultă cerința (2p)

Problema 3

Fie $n \in N^*$ fixat. Se cere:

a)Să se determine restul împărțirii lui 5^{2^n} prin 2^{n+2}.

b)Să se arate ca șirul $a_n = \left(\left\{\dfrac{5^{2^n}}{2^{n+2}}\right\}\right)^{-1}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numarului real a, este o progresie geometricășsi că orice progresie aritmetica $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni numere naturale care are doi termeni comuni cu $(a_n)_{n\geq 1}$ are o infinitate de termeni comuni cu progresia $(a_n)_{n\geq 1}$.

Barem problema 3

a). $5^{2^n} = 5^{2^n} - 1 + 1 = (5-1)(5^{2^0}+1)(5^{2^1}+1)......(5^{2^{n1}}+1)+1$ 5p

$5-1 \vdots 4$ *si* $5^{2^k}+1 \vdots 2$ rezulta cerinta 5p

b). $\left\{\dfrac{5^{2^n}}{2^{n+2}}\right\} = \left\{\dfrac{2^{n+2}k+1}{2^{n+2}}\right\} = \dfrac{1}{2^{n+2}} \Rightarrow \left\{\dfrac{5^{2^n}}{2^{n+2}}\right\}^{-1} = 2^{n+2}$ deci progresie geometrică 3p

$b_s = a_p \Rightarrow b_s = 2^{n+p}(\textit{primii doi termeni comuni})$

$b_s + mr = 2^{n+t}(\textit{ceilalti doi termeni comuni})$ 2p

$mr = 2^{n+p}\left(2^{t-p}-1\right) \Rightarrow r \mid 2^{n+p}(2^{t-p}-1) \Rightarrow r \mid 2^{n+p}(2^{k(t-p)}-1)$ 5p

$2^{n+p+kt-kp} - 2^{n+p} = ru \Rightarrow 2^{n+p} + ru = 2^{n+p+k(t-p)} \Rightarrow$

$b_s + ru = a_p 2^{k(t-p)} \Rightarrow \textit{alti termeni comuni}$ 5p

Problema 4

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_n = 2^n - n$, $n \in N$. Determinați toate numerele naturale p pentru care $s_p = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ este o putere cu exponent natural a lui 2.

Barem problema 4

$S_p = 2^{p+1} - \frac{p(p+1)}{2} - 1$ 5p

Se arată că $2^p < s_p < 2^{p+1}$, pentru $p \geq 3$. s_p nu poate fi o putere a lui 2. 3p

Se demonstrează prin inducție ca $\frac{p(p+1)}{2} + 1 < 2^p, \textit{pentru } p \geq 3$ 8p

Se demonstrează că $2^p < s_p$ 4p

Se observă că $s_0 = 2^0$, $s_1 = 2^1$, $s_2 = 2^2$ 3p

Deci, $p \in \{0,1,2\}$ 2p

Nota:
Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 25 de puncte.