CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2017

SUBIECTE- CLASA a IX a
Matematică-proba individuală

Problema 1

Dacă $a,b,c \in R_+^*$ si $a+b+c=1$ arătați că:

a). $(a+bc)(b+ac)(c+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

b). $\left(\frac{a}{bc}+1\right)\left(\frac{b}{ac}+1\right)\left(\frac{c}{ab}+1\right)\geq 64$

Problema 2

Fie M un punct în interiorul ΔABC neisoscel de laturi a,b,c cu G centrul de greutate al triunghiului și I centrul cercului inscris.

a)Demonstrați ca $\frac{AM}{MD}=\frac{A_{\Delta ABM}+A_{\Delta ACM}}{A_{\Delta BCM}}$ unde $\{D\}=AM\cap BC$.

b)Demonstrați ca M,G,I sunt coliniare dacă și numai dacă

$(b-c)A_{\Delta BCM}+(c-a)A_{\Delta CAM}+(a-b)A_{\Delta ABM}=0$

Problema 3

Fie $n\in N^*$ fixat. Se cere:

a)Să se determine restul împărțirii lui 5^{2^n} prin 2^{n+2}.

b)Să se arate ca șirul $a_n=\left(\left\{\frac{5^{2^n}}{2^{n+2}}\right\}\right)^{-1}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a, este o progresie geometrică și că orice progresie aritmetică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni numere naturale care are doi termeni comuni cu $(a_n)_{n\geq 1}$ are o infinitate de termeni comuni cu progresia $(a_n)_{n\geq 1}$.

Problema 4

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_n = 2^n - n$, $n \in N$. Determinați toate numerele naturale p pentru care $s_p = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ este o putere cu exponent natural a lui 2.

Nota:
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 25 de puncte.