CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR

martie 2017

MATEMATICĂ- proba individuală
CLASA a VIII-a BAREM

SUBIECTUL I : **a)** Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x-5y+3=0$ şi $x \in [-3;2]$. Să se calculeze

$$a=\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}.$$

b) Fie a, b, c numere raţionale pozitive astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Arătaţi că $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \in \mathbb{Q}$.

BAREM:

a. $a=\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$ ...4p.

Din $x-5y+3=0 \Rightarrow x+3=5y, x-2=5(y-1)$ ...3p.

$a=|y|\sqrt{26}+|y-1|\sqrt{26} \Leftrightarrow a=(|y|+|y-1|)\sqrt{26}$ ...5p.

$-3 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 1 \Rightarrow\ a=(y+1-y)\sqrt{26}=\sqrt{26}$ ...3p.

b. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=\frac{ab}{a+b}$ ...2p.

$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a^2+b^2+ab)^2}{(a+b)^2}$ ...6p.

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+ab}{a+b} \in \mathbb{Q}$ ...2p.

SUBIECTUL II : Fie expresia $E(x)=\left(\frac{7x-3}{2x^2-3x+1}+\frac{2}{1-x}\right):\frac{6x^2+x-1}{x-1}$, $x \in D$, unde D este domeniul maxim de definiţie al expresiei.

a. Arătaţi că $E(x)=\frac{1}{4x^2-1}$, $x \in D$.

b. Calculaţi $S=E(2)+E(3)+...+E(2017)$.

BAREM:

a. $2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1); 6x^2+x-1=(3x-1)(2x+1)$ ...6p.

$E(x)=\left(\frac{7x-3}{(2x-1)(x-1)}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x-1}{(3x-1)(2x+1)}$ ...3p.

$E(x)=\frac{3x-1}{(2x-1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{(3x-1)(2x+1)}$ ...3p.

$E(x)=\frac{1}{4x^2-1}$ ...3p.

b. $E(x)=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$ ...4p.

$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{4033}-\frac{1}{4035}\right)$ ...3p.

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1344}{4035}=\frac{772}{4035}$ ...3p.

SUBIECTUL III :

Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată.
$AM\perp SB, M\in SB, BN\perp SC, N\in SC, CP\perp SD, P\in SD, DQ\perp SA, Q\in SA$ și R simetricul lui N față de AC.

a) Demonstrați că punctele B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Aflați măsura unghiului dintre dreptele MP și RQ.

BAREM:
Din congruența triunghiurilor AMB, BNC, CPD și DQA …2 p

$\Rightarrow$ AQ = BM =CN = DP …1 p

Din Thales$\Rightarrow$NQ || AC (1 p) și $MP \parallel BD$. **(1)** …1 p

Dacă $\{V\}=QR\cap AC, \{T\}=NR\cap AC$ …1p

$NT\perp AC, QU\perp AC, U\in AC \Rightarrow QNTU$ paralelogram $\Rightarrow TU=QN$. …2 p

Din congruența triunghiurilor NTC și QUA se obține $TC=AU$. …3p

În triunghiul RQN avem VT linie mijlocie

$\Rightarrow VT=\frac{1}{2}\cdot QN=\frac{1}{2}\cdot UT \Rightarrow V$ este mijlocul segmentului UT …2 p

și prin urmare $VA=\frac{1}{2}\cdot AC$ deci $V=O$ și $OQ=OR$. **(2)** …2p

Dar punctele B, O, D coliniare și R, O, Q coliniare, deci B, D, Q, R sunt coplanare. …1p

b) Din relația (1) $\Rightarrow \sphericalangle(MP,RQ)=\sphericalangle(BD,RQ)$. …2p

Din congruența triunghiurilor BQA și DQA se obține $QD=BQ$. …3p

În plus $BO=OD$ (1 p) și QO=OR (1 p) $\Rightarrow BRDQ$ romb, (1 p) de unde $m(\sphericalangle DOQ)=90^0$. …2 p.

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

SUBIECTUL IV : Fie G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ACD, respectiv BCD, triunghiuri situate în plane diferite. Considerăm N mijlocul segmentului [CD], M$\in$(AB) aşa încât $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$ şi $MN\cap AG_2=\{E\}$. Demonstraţi că $EG_1 \parallel (BCD)$.

BAREM:

Avem de demonstrate că EG_1 este paralelă cu o dreaptă din (BCD). Intuim că ar fi vorba despre dreapta NB. Pentru aceasta calculăm rapoartele determinate de dreapta G_1E pe laturile ΔG_2AN ...2p

G_1 şi G_2 sunt centrele de greutate ale ΔACD şi ΔBCD$\Rightarrow \frac{NG_1}{AG_1}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{NG_2}{BG_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ ...3p

Notăm $G_1G_2\cap MN=\{P\}$. În ΔNMB, $PG_2 \parallel MB \Rightarrow \frac{PG_2}{MB}=\frac{NP}{NM}=\frac{1}{3}$ sau $PG_2=\frac{MB}{3}$ ...3p

Din $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$, obţinem $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$, deci $MB=\frac{3}{2}AM \Rightarrow PG_2=\frac{1}{2}AM$ sau $\frac{PG_2}{AM}=\frac{1}{2}$ ...5p

Dar $\Delta PG_2E \sim \Delta MAE$, deci $\frac{EG_2}{EA}=\frac{PG_2}{AM}=\frac{1}{2}$ **(1)** **...**2p

În ΔACD, G_1 este centru de greutate şi $\frac{NG_1}{AG_1}=\frac{1}{2}$ **(2)** **...** 3p

Din **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow \frac{EG_2}{EA}=\frac{NG_1}{AG_1}$ iar din reciproca lui Thales $\Rightarrow G_1E \parallel NG_2$ ...5p

$NG_2=NB\subset(BCD)$ şi $G_1\notin(BCD) \Rightarrow EG_1 \parallel (BCD)$ ...2p