

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR

martie 2017

MATEMATICĂ - proba individuală Clasa a VII-a

SUBIECTUL I

a) Rezolvați următoarea ecuație în mulțimea numerelor raționale:

$$\frac{x-1}{1} + \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} + \dots + \frac{x-\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} = 10000.$$

b) Determinați numerele \overline{abcd} în baza zece, știind că $\sqrt{abcd} = \overline{ab} + \sqrt{cd}$.

SUBIECTUL II

a) Arătați că $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$, $n \geq 1$ și că pentru orice număr natural $n \geq 2$, numărul $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ nu este număr natural.

b) Pentru $n > 1$ fixat, determinați numărul întreg k astfel încât $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^k = (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{2017}$.

c) Stabiliți forma numerelor naturale $n \geq 2$ astfel încât suma $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ să fie număr natural.

SUBIECTUL III

În pătratul ABCD, E, F, G și H sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA.

Fie $BH \cap CE = \{M\}$, $DF \cap CE = \{N\}$, $AG \cap DF = \{P\}$, $AG \cap BH = \{Q\}$. Demonstrați că:

a) Patrulaterul MNPQ este pătrat

b) $A_{ABCD} = 5A_{MNPQ}$

c) $A_{MNPQ} = A_{BME} + A_{CNF} + A_{DPG} + A_{AQH}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin O la bazele trapezului intersectează dreptele AD și BC respectiv în E și F. Demonstrați că EF este bisectoare a unghiului $\angle CEB$ dacă și numai dacă trapezul este dreptunghic în A și D.

Notă: - timp de lucru 3 ore

- fiecare subiect este notat cu 25 de puncte.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR

martie 2017

MATEMATICĂ - proba individuală Clasa a VII-a

Barem:

SUBIECTUL I

- a) $(x-1) + (2x-1) + (3x-1) + \dots + (100x-1) = 10000$ 2p.
- $\frac{100 \cdot 101}{2} \cdot x - 100 = 10000$ 3p.
- $\frac{101}{2} \cdot x - 1 = 100 \Leftrightarrow x = 2$ 5p.

b) Ridicând la pătrat fiecare membru al egalității, obținem :

$$\begin{aligned} \overline{abcd} &= \overline{ab}^2 + 2\overline{ab}\sqrt{\overline{cd}} + \overline{cd} \dots\dots\dots 3p. \\ \overline{ab00} + \overline{cd} &= \overline{ab}^2 + 2\overline{ab}\sqrt{\overline{cd}} + \overline{cd} \dots\dots\dots 3p. \\ 100 \cdot \overline{ab} &= \overline{ab}(\overline{ab} + 2\sqrt{\overline{cd}}) \dots\dots\dots 3p. \\ \sqrt{\overline{cd}} &= \frac{100 - \overline{ab}}{2} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 3p. \end{aligned}$$

Rezultă $\sqrt{\overline{cd}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{cd}$ – pătrat perfect de două cifre.

$$\left. \begin{aligned} \overline{cd} = 16 &\Rightarrow \overline{ab} = 92 \\ \overline{cd} = 25 &\Rightarrow \overline{ab} = 90 \\ \overline{cd} = 36 &\Rightarrow \overline{ab} = 88 \\ \overline{cd} = 49 &\Rightarrow \overline{ab} = 86 \\ \overline{cd} = 64 &\Rightarrow \overline{ab} = 84 \\ \overline{cd} = 81 &\Rightarrow \overline{ab} = 82 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{numerele căutate sunt: } 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216 \dots 3p.$$

SUBIECTUL II

- a) $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \sqrt{n}^2 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n-1} - \sqrt{n} \cdot \sqrt{n-1} - \sqrt{n-1}^2 =$ 5 p
- $= \sqrt{n}^2 - \sqrt{n-1}^2 = n - n + 1 = 1$

Pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$

Dar produsul lor este 1, deci $0 < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < 1$. Cum între 0 și 1 nu există numere

naturale, numărul $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ nu este număr natural. 5 p

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR

martie 2017

b) Folosind relația demonstrată la a) ridicată la puterea k , obținem

$$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^k (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^k = 1^k, \text{ și } (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^k (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^k = (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{2017+k},$$

$$\text{obținem } (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{2017+k} = 1 \Rightarrow 2017 + k = 0 \Rightarrow k = -2017 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ p}$$

c) Pentru a calcula $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ se amplifică fiecare fracție

de forma $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ cu $(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$ și obținem

$$S = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots\dots\dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) \Rightarrow S = \sqrt{n}-1 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p.}$$

Așadar, S este număr natural dacă și numai dacă $(\sqrt{n}-1)$ este număr natural nenul, adică n este pătrat perfect nenul. $\dots\dots\dots 3 \text{ p.}$

SUBIECTUL III

a) $\triangle ABH \equiv \triangle DAG (C.C.) \Rightarrow \sphericalangle ABH \equiv \sphericalangle DAG \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$$\text{Dar, } m(\sphericalangle DAG) + m(\sphericalangle BAG) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$m(\sphericalangle BAQ) + m(\sphericalangle QBA) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BQA) = 90^\circ \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p.}$$

Procedând la fel, în $MNPQ$ fiecare unghi are măsura de 90° , deci $MNPQ$ dreptunghi. $\dots\dots\dots 3 \text{ p.}$

$$\triangle APD \equiv \triangle BQA (I.U.) \Rightarrow AP = BQ \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p.}$$

$$\triangle AQH \equiv \triangle BME (I.U.) \Rightarrow AQ = BM \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p.}$$

$$\Rightarrow OQ = QM \Rightarrow MNPQ - \text{pătrat} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

b) În triunghiul ADP dreptunghic, PH mediană, deci $PH=AH$, deci triunghiul AHP isoscel. $\dots\dots\dots 2 \text{ p.}$

HQ - înălțime, deci $AQ=QP$. Analog $BM=MQ$, $CN=NM$, și

$$DP=PN \quad \dots\dots\dots 3 \text{ p.}$$

$$\text{Dacă notăm } PQ=x, \Rightarrow A_{MNPQ} = x^2, A_{APD} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ p.}$$

$$\text{Analog } A_{ABQ} = A_{CBM} = A_{DCN} = x^2 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\text{Deci, } A_{ABCD} = 5A_{MNPQ} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - JUNIOR

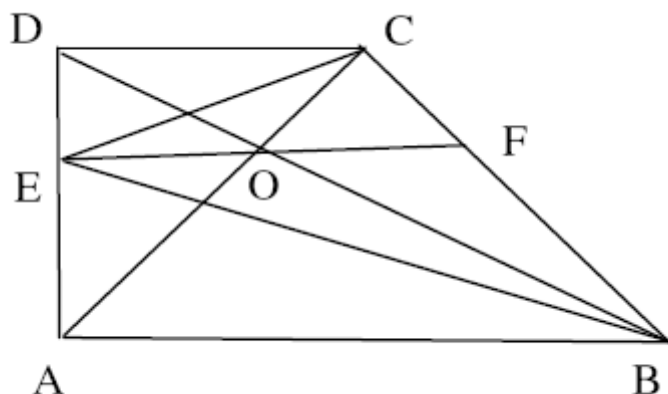
martie 2017

c) $ME \parallel AQ \Rightarrow \triangle BME \sim \triangle BQA \Rightarrow \frac{A_{BME}}{A_{BQA}} = \left(\frac{BE}{BA}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A_{BME} = \frac{x^2}{4} \dots\dots\dots 5p.$

La fel $A_{CNF} = A_{DPG} = A_{AQH} = \frac{x^2}{4} \dots\dots\dots 4p$

Rezultă $A_{MNPQ} = A_{BME} + A_{CNF} + A_{DPG} + A_{AQH} \dots\dots\dots 2p.$

SUBIECTUL IV



$\triangle COF \sim \triangle CAB; \triangle COD \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{CF}{FB} = \frac{CO}{OA} = \frac{CD}{AB} \quad (1) \dots\dots\dots 5p$

Din $AB \parallel EF \parallel CD$ rezultă că $\frac{CF}{FB} = \frac{DE}{EA}$, deci $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{EA} \quad (2) \dots\dots\dots 3 p$

” \Rightarrow ”

Dacă $[EF]$ este bisectoare a unghiului $\sphericalangle CEB$ din teorema bisectoarei în $\triangle BEC \Rightarrow \frac{CF}{FB} = \frac{EC}{EB}$

Deci $\triangle DEC \sim \triangle AEB$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle BAE \dots\dots\dots 6p$

Cum $m(\sphericalangle CDE) + m(\sphericalangle BAE) = 180^\circ$, $\Rightarrow m(\sphericalangle CDE) = m(\sphericalangle BAE) = 90^\circ$, deci ABCD - trapez dreptunghic.....3p

” \Leftarrow ”

$m(\sphericalangle CDA) = m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ$, din (2) și criteriul (L.U.L.) $\Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{CD}{AB} \dots\dots 3p$

Din (1) $\Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{CF}{AB}$, din reciproca teoremei bisectoarei rezultă $[EF]$ este bisectoare a unghiului $\sphericalangle CEB$..5p