INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

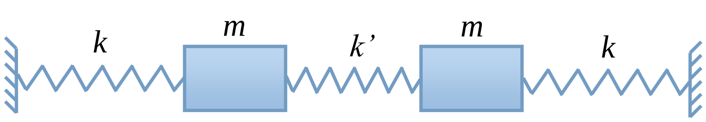
COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 610; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT - ȘTIINȚE

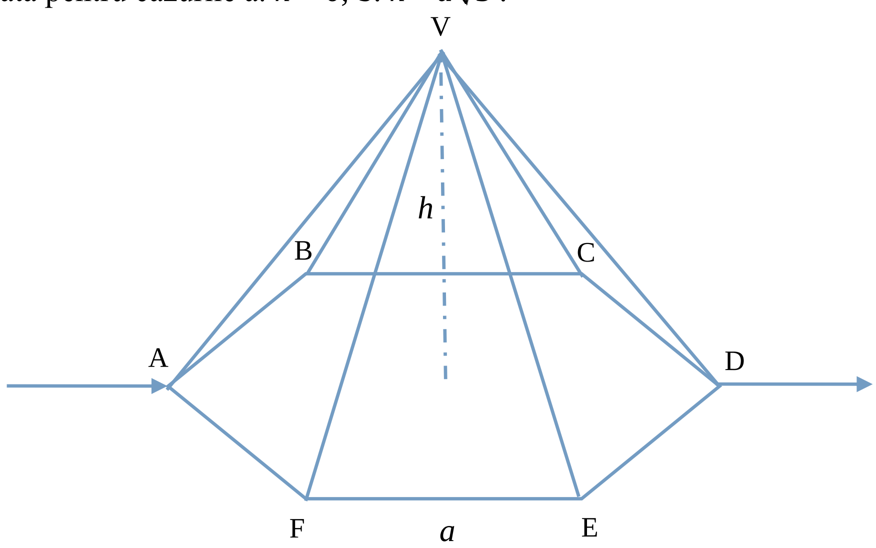
martie 2017

1. Se cere să se determine momentele din zi t_1 si t_2 la care limbile unui ceasornic (orar şi minutar) se află în prelungire şi respectiv sunt suprapuse.
(Mihail Atanasiu, Fizica pentru admitere în facultate, Ed. Albatros 1974)

2. Să se determine pulsaţiile unui sistem format din două corpuri de masă m, cuplate la câte un resort de constantă elastică k. Corpurile sunt legate împreună printr- un al treilea resort de constantă de elasticitate k'.



3. Se cere să se calculeze rezistenţa echivalentă a unui circuit format din laturile bazei şi muchiile suprafeţei laterale ale unei piramide cu baza hexagon, dacă curentul intră printr-unul din varfurile bazei şi iese prin vârful opus acestuia, situat pe diagonala aceleiaşi baze. Se consideră cunoscute: a - lungimea laturii hexagonului, h - inălţimea piramidei şi r_l - rezistenta electrica a unitatii de lungime. Rezistenţa echivalentă va fi calculată pentru cazurile a. $h = 0$; b. $h = a\sqrt{3}$.



4. Un om aflat pe marginea piscinei urmăreste o piatra de pe fundul acesteia. Adâncimea piscinei este h. La ce adâncime masurată faţă de suprafaţa apei se formează imaginea pietrei dacă linia de vizualizare face cu normala la suprafaţa apei unghiul θ ?
(I.E. Irodov, Problems in General Physics, Mir Publisher Moscow, 1988)

Problema 1

$\theta_1 = \omega_1 t$, $\theta_2 = \omega_2 t$

Acele sunt in prelungire: $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ de unde rezulta $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$.

Acele se suprapun: $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$ de unde $t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = 2t_1$

Numeric: $\omega_1 = \dfrac{\pi}{6} rad / ora$, $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{1} rad / ora$ si rezulta

$t_1 = 0.545\, ore = 0h32\min 42\sec$, $t_2 = 1.09\, ore = 1h5\min 24\sec$

Problema 2

Aplicand principiul al doilea al mecanicii pentru cele doua corpuri:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k'(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 - k'(x_1 - x_2) = 0$$

Impunem solutiile de forma: $x_1 = A_1 \cos\omega t$, $x_2 = A_2 \cos\omega t$, dupa simplificari obtinem sistemul de ecuatii:

$$\left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k'}{m} A_2 = 0$$

$$-\frac{k'}{m} A_1 + \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

ce admite solutii nebanale daca

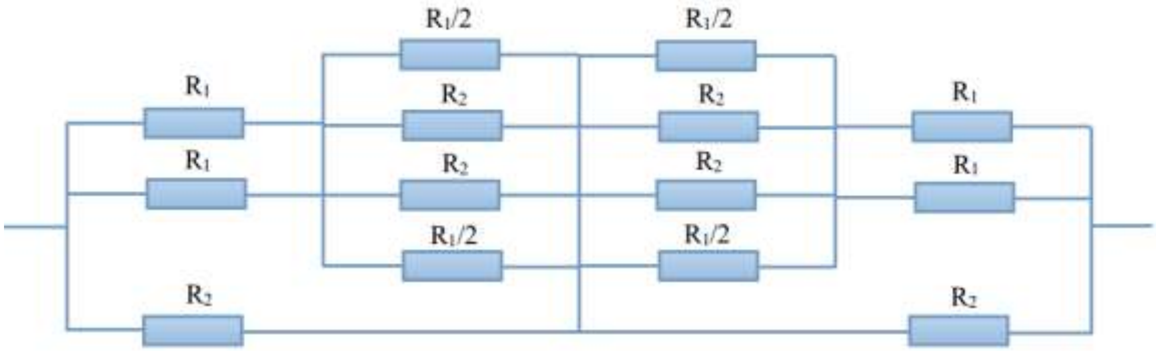
$$\begin{vmatrix} \frac{k + k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k + k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

si astfel

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

Problema 3

Din considerente de simetrie circuitul echivalent este:



$R_1 = ar_l$

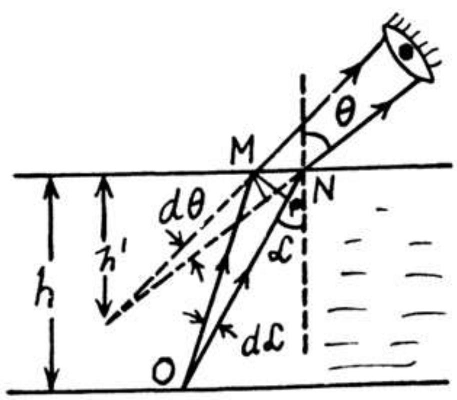
$R_2 = ar_l\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}} = anr_l$

$\mathrm{R}_{\mathrm{echiv}} = \frac{2n(1+3n)}{4n^2+5n+1}ar_l$

a) h = 0, n=1, $\mathrm{R}_{\mathrm{echiv}} = \frac{8}{10}ar_l$

b) $\mathrm{h} = a\sqrt{3}$, n = 2, $\mathrm{R}_{\mathrm{echiv}} = \frac{28}{27}ar_l$

Problema 3



Din figura observam ca

$\sin d\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{MN\cos\alpha\cos(\alpha+d\alpha)}{h} \cong \frac{MN\cos^2\alpha}{h}$ si similar $\sin d\theta \cong \frac{MN\cos^2\alpha}{h'}$

iar $h' = \frac{h\cos^2\theta}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{d\theta}$

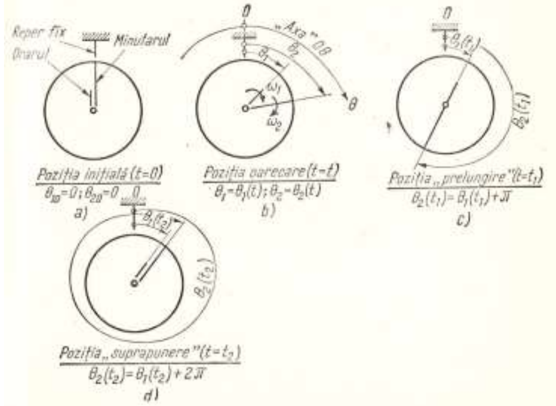
Din legea refractiei $n\sin\alpha = \sin\theta$ putem scrie $\cos\alpha = \sqrt{\frac{n^2-\sin^2\theta}{n^2}}$ iar diferentiind

obtinem: $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{n\cos\alpha}$.

In final $h' = \frac{n^2h\cos^3\theta}{\left(n^2-\sin^2\theta\right)^{3/2}}$.

E 3.4. Se cere să se determine orele t_1 şi t_2 la care limbile unui ceasornic se află în prelungire şi respectiv suprapuse. [7]

Rezolvare. Procedăm conform programului metodei ecuaţiilor de mişcare aplicate mişcării circulare sau de rotaţie: „axa" $O\theta$, originea de măsurare a „abscisei" θ, originea timpului (ora zero) şi figura



generală (poziţia oarecare) sînt reprezentate în fig. E 3.4, a şi b.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două limbi sînt [v. (3.3)]

$$\theta_1 = \omega_1 t \quad \text{şi} \quad \theta_2 = \omega_2 t$$

deoarece ambele pleacă fără coordonată iniţială la ora $t = 0$ şi au mişcări uniforme cu vitezele unghiulare ω_1 respectiv ω_2.

Informaţia „prelungire", înseamnă că pentru $t = t_1$, $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, tradusă analitic astfel

$$\omega_2 t_1 = \omega_1 t_1 + \pi$$

de unde rezultă

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Informaţia „suprapunere", înseamnă că pentru $t = t_2$, $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, tradusă analitic astfel

$$\omega_2 t_2 = \omega_1 t_2 + 2\pi$$

de unde rezultă

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = 2t_1.$$

Pentru rezolvarea numerică observăm că, deoarece minutarul parcurge întregul cadran (2π) într-o oră şi orarul parcurge acelaşi interval în 12 ore, vitezele lor unghiulare sînt

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/oră}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/oră}$$

cu care avem

$$t_1 = \frac{\pi}{2\pi - \frac{\pi}{6}} = \frac{6}{11} = 0{,}545 \text{ ore}$$

deci t_1 este ora

$$0^{\mathrm{h}}\ 32'\ 42''.$$

De asemenea

$$t_2 = 2t_1 = 2 \times 0{,}545 = 1{,}09 \text{ ore}$$

deci t_2 este ora $1^{\mathrm{h}}\ 5'\ 24''$.

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k'(x_1 - x_2) = 0 \qquad\qquad \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k'}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 - k'(x_1 - x_2) = 0 \qquad\qquad \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k'}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

Impunem soluții de forma:

$$x_1 = A_1 \cos\omega t\ ,\ \ x_2 = A_2 \cos\omega t$$

Înlocuind în ecuații rezultă:

$$\dot{x}_1 = -A_1\omega \sin\omega t\ , \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \cos\omega t\ ,\ \ \dot{x}_2 = -\omega A_2 \sin\omega t\ ,\ \ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \cos\omega t$$

$$-\omega^2 A_1 \cos\omega t + \frac{k}{m}A_1 \cos\omega t + \frac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos\omega t = 0 \qquad \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{k'}{m}A_2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$-\omega^2 A_2 \cos\omega t + \frac{k}{m}A_2 \cos\omega t - \frac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos\omega t = 0 \qquad -\frac{k'}{m}A_1 + \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

Pentru a avea soluții nebanale trebuie ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor A_1 și A_2 să fie nul.

$$\begin{vmatrix} \frac{k + k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k + k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{k + k'}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k'^2}{m^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

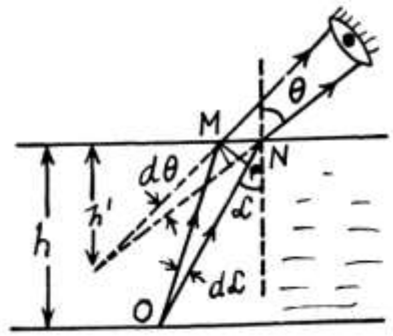
$$\frac{k + k'}{m} - \omega^2 = \pm\frac{k'}{m} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{k + k'}{m} - \omega_1^2 = \frac{k'}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{k + k'}{m} - \omega_2^2 = -\frac{k'}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

5.18 From the Fig.

$$\sin d\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{MN\cos\alpha}{h\sec(\alpha + d\alpha)}$$



As $d\alpha$ is very small, so

$$d\alpha = \frac{MN\cos\alpha}{h\sec\alpha} = \frac{MN\cos^2\alpha}{h} \qquad (1)$$

Similarly

$$d\theta = \frac{MN\cos^2\theta}{h'} \qquad (2)$$

From Eqns (1) and (2)

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{h'\cos^2\alpha}{h\cos^2\theta} \quad \text{or}, \quad h' = \frac{h\cos^2\theta}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{d\theta} \qquad (3)$$

From the law of refraction

$$n\sin\alpha = \sin\theta \qquad (A)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{n}, \quad \text{so}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2\theta}{n^2}} \qquad (B)$$

Differentiating Eqn.(A)

$$n\cos\alpha\, d\alpha = \cos\theta\, d\theta \quad \text{or}, \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{n\cos\alpha} \qquad (4)$$

Using (4) in (3), we get

$$h' = \frac{h\cos^3\theta}{n\cos^3\alpha} \qquad (5)$$

Hence $$h' = \frac{h\cos^3\theta}{n\left(\frac{n^2 - \sin^2\theta}{n^2}\right)^{3/2}} = \frac{n^2 h\cos^3\theta}{\left(n^2 - \sin^2\theta\right)^{3/2}} \text{ [Using Eqn.(B)]}$$