CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT Junior

martie 2018

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a VIII a

SUBIECTUL I

Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$-21x^2+26xy-8y^2=1.$$

***

SUBIECTUL II

Fie $x_1, x_2, ..., x_{2018}$ numere reale pozitive. Demonstrați că:

a) $E=\dfrac{\left(x_1^2+2016x_1+1\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(x_{2018}^2+2016x_{2018}+1\right)}{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_{2018}}\geq 2018^{2018}.$

b) Dacă $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}+...+\dfrac{x_{2018}^2+x_1^2}{x_{2018}+x_1}=x_1+x_2+...+x_{2018}$, arătaţi că $\dfrac{x_1+x_2+x_3+...+x_{2018}}{x_1-x_2+x_3-...+x_{2017}}\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și punctele $E\in(AC), F\in(AD), G\in(BC)$ astfel încât

$$\frac{AE}{EC}=\frac{2}{3},\ \frac{AF}{AD}=\frac{2}{5},\ \frac{BC}{GC}=\frac{5}{3}\ .$$

a) Demonstrați că $AB\perp CD$.

b) Dacă $AB=15cm$, aflați aria triunghiului EFG.

c) Dacă M este mijlocul segmentului $[CD]$ și N mijlocul segmentului $[AB]$, demonstrați că $MN\perp(EFG)$.

***

SUBIECTUL IV

Fie $ABCD$ un pătrat şi $AM\perp(ABC)$. Punctele E şi F aparţin segmentelor (AD) şi respectiv (BC) astfel încât $AE=ED$ şi $BF=2FC$. Dreapta EF intersectează prelungirea laturii CD în G. Arătaţi că dacă $d(D,MG)=d(A,MG)$ atunci $AM=3AB$.

***

Notă: *Timp de lucru 3 ore.*
Se acordă 25 de puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect.

SUBIECTE ŞI BAREME
proba de matematică
clasa a VIII a

SUBIECTUL I

Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$-21x^2+26xy-8y^2=1.$$

***

Soluţie:

$-21x^2+14xy+12xy-8y^2=1$

$7x(-3x+2y)-4y(-3x+2y)=1$

$(-3x+2y)(7x-4y)=1$ 10p

$x, y \in \mathbf{N} \Leftrightarrow -3x+2y,\ 7x-4y \in \mathbf{Z}$ 3p

1) $\begin{cases}-3x+2y=1\\7x-4y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+4y=2\\7x-4y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$ 5p

2) $\begin{cases}-3x+2y=-1\\7x-4y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+4y=-2\\7x-4y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=-5\end{cases}$ 5p

S = {(3,5)} 2p

SUBIECTUL II

Fie $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{2018}$ numere reale pozitive. Demonstrați că:

a) $E=\dfrac{\left(x_1^2+2016x_1+1\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(x_{2018}^2+2016x_{2018}+1\right)}{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_{2018}}\geq 2018^{2018}$.

b) Dacă $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}+...+\dfrac{x_{2018}^2+x_1^2}{x_{2018}+x_1}=x_1+x_2+...+x_{2018}$, arătaţi că $\dfrac{x_1+x_2+x_3+...+x_{2018}}{x_1-x_2+x_3-...+x_{2017}}\in\mathbb{N}$.

Soluție:

a) $E=\dfrac{x_1^2+2016x_1+1}{x_1}\cdot...\cdot\dfrac{x_{2018}^2+2016x_{2018}+1}{x_{2018}}$ (5p)

și folosind că $x+\dfrac{1}{x}\geq 2,\ \forall x\in(0,\infty)$ (3p)

deducem că $E=\left(x_1+2016+\dfrac{1}{x_1}\right)\cdot...\cdot\left(x_{2018}+2016+\dfrac{1}{x_{2018}}\right)\geq 2018^{2018}$ (5p)

b) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b}{2}$, cu egalitate dacă $a=b$ (5p)

Prin sumare, deducem:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}+...+\frac{x_{2018}^2+x_1^2}{x_{2018}+x_1}\geq\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+...+\frac{x_{2018}+x_1}{2},\left(=x_1+x_2+...+x_{2018}\right)$$ (5p)

Prin urmare $x_1=x_2=...=x_{2018}=x$. Astfel, $\dfrac{x_1+x_2+x_3+...+x_{2018}}{x_1-x_2+x_3-...+x_{2017}}=\dfrac{2018x}{x}=2018\in\mathbb{N}$ (2p).

SUBIECTUL III

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și punctele $E \in (AC), F \in (AD), G \in (BC)$ astfel încât

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}, \frac{AF}{AD} = \frac{2}{5}, \frac{BC}{GC} = \frac{5}{3}.$$

d) Demonstraţi că $AB \perp CD$.

e) Dacă $AB = 15cm$, aflaţi aria triunghiului EFG.

f) Dacă M este mijlocul segmentului $[CD]$ și N mijlocul segmentului $[AB]$, demonstraţi că $MN \perp (EFG)$.

***

Soluție:

a) $\triangle\, ACD$ și $\triangle\, BCD$ sunt echilaterale, rezultă că $AM \perp CD$ și $BM \perp CD$. Cum $AM \cap BM = \{M\} \Rightarrow CD \perp (ABM)$. Din $AB \subset (ABM) \Rightarrow AB \perp CD$. 7p.

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{BC}{GC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BG}{GC} = \frac{2}{3} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{R.T.Th.} EG \parallel AB.$ 2p

$\left.\begin{array}{r} \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3} \\ \frac{AF}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{R.T.Th.} EF \parallel CD.$ 2p

Din a) rezultă $EF \perp EG$. 2p

$\left.\begin{array}{r} \triangle\, ACD \\ EF \parallel CD \end{array}\right\} \xrightarrow{T.F.A.} \triangle\, ACD \sim \triangle\, AEF \Rightarrow \mathrm{EF} = 6$ cm. 1p

$\left.\begin{array}{r} \triangle\, ABC \\ EG \parallel AB \end{array}\right\} \xrightarrow{T.F.A.} \triangle\, ABC \sim \triangle\, EGC \Rightarrow \mathrm{EG} = 9$ cm. 1p

Atunci $A_{\triangle EFG} = \frac{EF \cdot EG}{2} = 27\, cm^2$. 1p

c) $\triangle\, ABM$ este isoscel$\Rightarrow MN \perp AB$. 2p

$\triangle\, CDN$ este isoscel$\Rightarrow MN \perp CD$. 2p

$\left.\begin{array}{r} MN \perp AB \\ MN \perp CD \\ EF \parallel CD \\ EG \parallel AB \\ EF \cap EG = \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp (EFG).$ 5p

SUBIECTUL IV

Fie $ABCD$ un pătrat şi $AM \perp (ABC)$. Punctele E şi F aparţin segmentelor (AD) şi respectiv (BC) astfel încât $AE = ED$ şi $BF = 2FC$. Dreapta EF intersectează prelungirea laturii CD în G. Arătaţi că dacă $d(D, MG) = d(A, MG)$ atunci $AM = 3AB$.

***

Soluție:

Notăm cu AA' respectiv DD' cele două perpendiculare din A şi respectiv D pe dreapta MG.

Atunci $AA' = DD' \Rightarrow \dfrac{AA' \cdot MG}{2} = \dfrac{DD' \cdot MG}{2} \Rightarrow A_{AMG} = A_{DMG}$. (4p)

Justificăm faptul că triunghiurile MDG şi MAG sunt dreptunghice. (2p)

Atunci $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow \dfrac{MD \cdot DG}{2} = \dfrac{MA \cdot AG}{2} \Rightarrow MD \cdot DG = MA \cdot AG$ (5p)

Notăm $AM = x$ şi $AD = a$.

Folosim TFA în triunghiul EDG şi rezultă

$\dfrac{CG}{GD} = \dfrac{FC}{ED} \Rightarrow \dfrac{CG}{GD} = \dfrac{a}{3} : \dfrac{a}{2} \Rightarrow CG = 2CD \Rightarrow CG = 2a$. (3p)

Folosim teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ADG şi MAD obţinem

$AG = a\sqrt{10}$ si $MD = \sqrt{a^2 + x^2}$. (6p)

Deoarece $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow MA \cdot AG = MD \cdot GD \Rightarrow x \cdot a\sqrt{10} = 3a \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$

Se obţine $x = 3a$. (5p)