# CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2018

**Barem de corectare și notare**

**Clasa a XI a**

**proba de matematică**

## Problema 1

Fie $k \geq 2$ un număr natural par fixat și funcția $f: R \to R$, $f(x)=\dfrac{C_k^1 x + C_k^3 x^3 + \dots C_k^{k-1} x^{k-1}}{C_k^0 + C_k^2 x^2 + \dots + C_k^k x^k}$ .

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}\right)(x)$ , unde $x \in R$.

***

## Soluție:

Se observă că $f(x)=\dfrac{(1+x)^k-(1-x)^k}{(1+x)^k+(1-x)^k}$ , iar prin calcul se obține $(f\circ f)(x)=\dfrac{(1+x)^{k^2}-(1-x)^{k^2}}{(1+x)^{k^2}+(1-x)^{k^2}}$.

……………..**5 puncte.**

Prin inducție matematică se demonstrează că $\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}\right)(x)=\dfrac{(1+x)^{k^n}-(1-x)^{k^n}}{(1+x)^{k^n}+(1-x)^{k^n}}$, $\forall x \in R$.

……………..**5 puncte.**

- Pentru $x>0$ , avem $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|<1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{k^n}=0$ și, prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}\right)(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k^n}}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k^n}}=1.$$

…………..**5 puncte.**

- Pentru $x=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}\right)(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2^{k^n}}{2^{k^n}}=-1$. …………... **2 puncte.**

- Pentru $x<0,\ x\neq -1$, avem $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|<1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ ori}}\Big)(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{k^n}-1}{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{k^n}+1}=-1.$

……………….5 puncte.

- Pentru $x=0$, $f(0)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ ori}}\Big)(0)=0.$

Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ ori}}\Big)(x)=\operatorname{sgn}(x)$, pentru orice $x\in R$. ……………...3 puncte.

**Problema 2**

Se consideră matricele $A,B,C\in \mathbf{M}_n(C)$, astfel încât $ABC=I_n$. Să se arate că, dacă matricele $I_n+A+AB, I_n+B+BC, I_n+C+CA$ sunt inversabile, atunci suma inverselor lor este egală cu $I_n$.

***

**Soluție:**

$(I_n+A+AB)^{-1}+(I_n+B+BC)^{-1}+(I_n+C+CA)^{-1}=$

$(I_n+A+AB)^{-1}+(I_n+B+BC)^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A+(I_n+C+CA)^{-1}\cdot(AB)^{-1}\cdot AB=$ …………7 puncte.

$(I_n+A+AB)^{-1}+(A+AB+ABC)^{-1}\cdot A+\left(AB(I_n+C+CA)\right)^{-1}\cdot AB=$ …………7 puncte.

$(I_n+A+AB)^{-1}+(A+AB+I_n)^{-1}\cdot A+(AB+I_n+A)^{-1}\cdot AB=$ ………….7 puncte.

$(I_n+A+AB)^{-1}(I_n+A+AB)=I_n$ ………….4 puncte.

**Problema 3**

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\cdot\log_2\left(\sqrt[2^n]{2}+\sqrt[2^n]{3}+\ldots\ldots+\sqrt[2^n]{2^n+1}\right)$.

***

**Soluție:**

Utilizând inegalitatea lui Bernoulli avem $1<\sqrt[2^n]{1+k}<1+\dfrac{k}{2^n}\Rightarrow 2^n<\sum\limits_{k=1}^{2^n}\sqrt[2^n]{1+k}<\dfrac{3\cdot 2^n+1}{2}<2^{n+1}$

...............**10 puncte.**

$\Rightarrow n<\log_2\left(\sum\limits_{k=1}^{2^n}\sqrt[2^n]{1+k}\right)<n+1\Rightarrow\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\log_2\left(\sum\limits_{k=1}^{2^n}\sqrt[2^n]{1+k}\right)<\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$. ...............**5 puncte**.

Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=e$, rezultă că limita șirului este e. ..............**10 puncte**.

**Problema 4**

Să se determine funcţiile $f\colon[0,3]\to(0,1]$ care verifică condiţiile:

$i)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}\in\mathbb{R}$.

$ii)$ $f(3x)+3f(x)=4f^3(x), (\forall)x\in[0,1]$.

**Soluție:**

Pentru $x=0\Rightarrow f(0)+3f(0)=4f^3(0)\Rightarrow f(0)\in\{-1,0,1\}\Rightarrow f(0)=1\in(0,1]$

Avem $\lim_{x\to 0}(f(x)-f(0))=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}\cdot x^2=0\Rightarrow f$ continuă în $x_0=0$**.............2.puncte.**

**CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT**

martie 2018

Fie $g: [0,3] \to \left[0,\frac{\pi}{2}\right), g(x) = \arccos f(x), (\forall)\, x \in [0,3] \Rightarrow g$ continuă în $x_0 = 0$ şi $f(x) = \cos g(x), (\forall)x \in [0,3]$.

**..................2 puncte**.

Înlocuind în relaţia *ii)*, obţinem:

$\cos g(3x) = 4\cos^3 g(x) - 3\cos g(x) = \cos 3g(x)$ .................**2 puncte.**

Deoarece $g(x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos g(3x) \geq 0$, deci şi $\cos 3g(x) \geq 0$ (1) .................**2 puncte.**

Cum $g(x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $3g(x) \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right)$ (2)

Din (1) şi (2) obţinem $3g(x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ , deci ecuaţia $\cos g(3x) = \cos 3g(x)$ implică

$g(3x) = 3g(x), (\forall)x \in [0,1] \Rightarrow g(x) = 3g\left(\frac{x}{3}\right), (\forall)x \in [0,3]$

Prin metoda inducţiei matematice rezultă că $g(x) = 3^n g\left(\frac{x}{3^n}\right), (\forall)x \in [0,3]$ şi $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$,

de unde rezultă că $\frac{g(x)}{x} = \frac{g\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}$ $(\forall)x \in (0,3]$ şi $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ (3) **........6 puncte**

Deoarece $g(0) = \arccos f(0) = \arccos 1 = 0$ , avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos g(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{g(x)}{2}}{\left(\frac{g(x)}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{g(x)}{2}\right)^2}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

.....**6 puncte**

Fie $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 = a \in [0,\infty)$. Obţinem:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{g\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}\right)^2 = a, (\forall)x \in (0,3]$ şi $g(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \sqrt{a} \Rightarrow g(x) = \sqrt{a}x$, $(\forall)x \in (0,3]$

Deoarece $0 \leq g(x) < \frac{\pi}{2}, (\forall)x \in [0,3] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a}x < \frac{\pi}{2}, (\forall)x \in [0,3] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \frac{\pi}{6}$................**3 puncte**

şi deci, funcţiile care verifică ipotezele sunt $f: [0,3] \to (0,1], f(x) = \cos mx$, unde $m \in [0,\frac{\pi}{6})$...**2 puncte.**