CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT- JUNIOR

februarie-martie 2019

SUBIECTE – Clasa a X-a
proba de matematică- individual

Problema 1

Fie $\alpha,\beta \geq 0$, $a,b \geq 1$ numere reale. Arătați că $a^{\alpha \sin x+\beta \cos x} \cdot b^{\alpha \cos x+\beta \sin x} \leq e^{(\alpha+\beta)\cdot\sqrt{\ln^2 a+\ln^2 b}}$

***

Problema 2

Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ cu $a+b+c=1$. Demonstrați că

$$\log_a(a^2+b^2+c^2)+\log_b(a^2+b^2+c^2)+\log_c(a^2+b^2+c^2) \leq$$
$$a\log_a(abc)+b\log_b(abc)+c\log_c(abc)$$

***

Problema 3

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, unde $n \geq 3$ este un număr natural. Considerăm în planul complex punctele $A_1,A_2,...,A_n$ și P de afixe $\varepsilon,2\varepsilon^2,...,n\varepsilon^n$ și z, cu $|z|=1$.

Știind că $\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\bar{z}\right) \leq -\frac{65}{12}$ și $PA_1^2+PA_2^2+...+PA_n^2=\frac{9n^2}{2}$, să se arate că n=6.

***

Problema 4

Să se determine toate funcțiile $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ cu proprietatea $|f(i)-f(j)| \geq |i-j|$, pentru orice $i,j=\overline{1,n}$.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 25 de puncte.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT- JUNIOR

februarie-martie 2019