MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ
COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12, 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com
romania2019.eu

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

BAREM- CLASA a XII a

proba de matematică individual

Subiectul 1

Se dă șirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(n+1)x} \cdot \cos^n(x-\frac{\pi}{4}) \cdot \cos x\, dx$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}$.

Barem

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}^n} [e^x(\sin x + \cos x)]^n \cdot e^x \cos x\, dx =$ 5p

$= \frac{1}{2\sqrt{2}^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^x(\sin x + \cos x)]^n\, [e^x(\sin x + \cos x)]' dx$ .....10 p

$= \frac{1}{(n+1)2\sqrt{2}^n} (e^x(sinx + cosx))^{n+1} \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{(n+1)\frac{\pi}{2}}-1}{2(n+1)\sqrt{2}^n}.$ .....5 p

Cum $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{(n+2)\frac{\pi}{2}}-1}{e^{(n+1)\frac{\pi}{2}}-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{e^{(n+2)\cdot\frac{\pi}{2}}}}{1-\frac{1}{e^{(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{2}}.$ .....5 p

Subiectul 2

Rezolvați ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ în Z_{13} și în Z_{19}, apoi deduceți că 247 divide $(3^{7^n-1} - 1)(7^{4^n-1} - 1), \forall n \in N$.

Barem

Prin verificări directe obținem că ecuația dată are în Z_{13} soluțiile $\hat{3}$ și $\hat{9}$, iar în Z_{19} are soluțiile $\overline{7}$ *și* $\overline{11}$. .....8 p

Cum $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, rezultă că $\widehat{9^3} = \hat{1}$ (în Z_{13}) și $\overline{7^3} = \overline{1}$ (în Z_{19}).....5 p

Atunci $\widehat{3^{7^n-1}} - \hat{1} = \hat{3}^{(7-1)(7^{n-1}+\cdots+1)} - \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow 13 \,/\, 3^{7^n-1} - 1, \forall n \in N$ .....5 p

$\overline{7^{4^n-1}} - \overline{1} = \overline{7}^{(4-1)(4^{n-1}+\cdots+1)} - \overline{1} = \overline{0} \Rightarrow 19 \,/\, 7^{4^n-1} - 1, \forall n \in N$ .....5 p

Obținem astfel că $13 \cdot 19 / (3^{7^n-1} - 1)(7^{4^n-1} - 1), \forall n \in N$ .....2 p

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

Subiectul 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Dacă există un număr întreg $n>0$ astfel încât aplicațiile $f:G\to G,\ f(x)=x^n$

$g:G\to G,\ g(x)=x^{n+1}$ sunt morfisme de grupuri, iar funcția f este surjectivă, atunci G este

comutativ.

Fie $a,b\in G$ arbitrare. Deoarece f este surjectivă, există $c\in G$ cu $f(c)=b$, adică $b=c^n$

…….....8 p

Cum f și g sunt mofisme, avem $f(a\cdot c)=f(a)\cdot f(c)$, respectiv, $g(a\cdot c)=g(a)\cdot g(c)$,

.....….....4 p

care se mai scriu:

$(a\cdot c)^n=a^n\cdot c^n$ și $(a\cdot c)^{n+1}=a^{n+1}\cdot c^{n+1}\Leftrightarrow (a\cdot c)^n\cdot(a\cdot c)=a^{n+1}\cdot c^{n+1}\Leftrightarrow a^n\cdot c^n\cdot a\cdot c=a^{n+1}\cdot c^{n+1}$,

.....….8 p

de unde $c^n\cdot a=a\cdot c^n$ și cum $b=c^n$, obținem că $a\cdot b=b\cdot a$. Așadar, $(G,\cdot)$ este comutativ.

…… 5 p

Subiectul 4

Fie $f:[1;\infty)\to R$ continuă astfel încât $f(x^p)\le x^k f(x), \forall x\in[1;\infty)$, unde $k>0, p>1$. Demonstraţi că pentru $a>1$ are loc inegalitatea: $\int_1^a f(x)dx\le a^{1+\frac{k}{p-1}}\cdot lna\cdot f(1)$.

Barem

Se demonstrează prin inducţie că $f(x^{p^n})\le x^{k\frac{p^n-1}{p-1}}\cdot f(x), \forall n\in N^*$. .....7 p

Cu schimbarea de variabilă $x=y^{p^n}$ obţinem:

$$\int_1^a f(x)dx=p^n\int_1^{a^{\frac{1}{p^n}}} y^{p^n-1}\cdot f(y^{p^n})dy\le p^n\int_1^{a^{p^{-n}}} y^{p^n-1}\cdot y^{k\frac{p^n-1}{p-1}}\cdot f(y)dy\le$$

$$\le p^n\int_1^{a^{p^{-n}}} y^{p^n-1}\cdot y^{k\frac{p^n-1}{p-1}}\cdot f(y)dy\le p^n\int_1^{a^{p^{-n}}} a^{1+\frac{k}{p-1}}\cdot f(y)dy=a^{1+\frac{k}{p-1}}\cdot p^n\cdot\left[F(a^{p^{-n}})-F(1)\right],$$

unde F este o primitivă a lui f. .....10 p

Folosind teorema lui Lagrange pentru F rezultă că există $c_n \in \left(1;\ a^{p^{-n}}\right)$ astfel ca $\frac{F\left(a^{p^{-n}}\right)-F(1)}{a^{p^{-n}}-1} = f(c_n)$.

Atunci obținem: $\int_1^a f(x)dx \leq a^{1+\frac{k}{p-1}} \cdot \frac{a^{p^{-n}}-1}{p^{-n}} \cdot\ f(c_n)$ .....5 p

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ se obține concluzia. .....3 p