CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT- JUNIOR

februarie-martie 2019

BAREM- Clasa a X-a
proba de matematică individual

Problema 1

Fie $\alpha,\beta \geq 0,\ a,b \geq 1$ **numere reale. Arătați că** $a^{\alpha \sin x+\beta \cos x} \cdot b^{\alpha \cos x+\beta \sin x} \leq e^{(\alpha+\beta)\cdot\sqrt{\ln^2 a+\ln^2 b}}$

Barem:

$a^{\alpha \sin x+\beta \cos x} = e^{\ln a^{\alpha \sin x+\beta \cos x}} = e^{(\alpha \sin x+\beta \cos x)\ln a}$

$b^{\alpha \cos x+\beta \sin x} = e^{(\alpha \cos x+\beta \sin x)\ln b}$ ……..7puncte

$e^{(\alpha \sin x+\beta \cos x)\ln a} \cdot e^{(\alpha \cos x+\beta \sin x)\ln b} = e^{\alpha(\sin x\ \ln a+\cos x \ln b)} \cdot e^{\beta(\cos x \ln a+\sin x \ln b)} \leq$

$\leq e^{\alpha\sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x)(\ln^2 a+\ln^2 b)}} \cdot e^{\beta\sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\ln^2 a+\ln^2 b)}} =$ ……15 puncte

$= e^{\alpha\sqrt{(\ln^2 a+\ln^2 b)}} \cdot e^{\beta\sqrt{(\ln^2 a+\ln^2 b)}} = e^{(\alpha+\beta)\sqrt{\ln^2 a+\ln^2 b}}$. ……..…3 puncte.

Problema 2

Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ **cu** $a+b+c=1$**. Demonstrați că**

$$\log_a(a^2+b^2+c^2)+\log_b(a^2+b^2+c^2)+\log_c(a^2+b^2+c^2) \leq$$
$$a\log_a(abc)+b\log_b(abc)+c\log_c(abc)$$

Barem

Cum $a,b,c \in (0,\infty), a+b+c=1$ obținem $a,b,c \in (0,1)$ deci funcțiile logaritm sunt convexe și rezultă conform inegalității lui Jensen că

$log_a(a^2+b^2+c^2) \leq alog_a a + blog_a b + clog_a c = a + blog_a b + clog_a c$

Analog obținem $log_b(a^2+b^2+c^2) \leq b + alog_b a + clog_b c$ și $log_c(a^2+b^2+c^2) \leq c + alog_c a + blog_c b$

Adunând se obține $log_a(a^2+b^2+c^2) + log_b(a^2+b^2+c^2) + log_c(a^2+b^2+c^2) \leq a+b+c+a(log_b a + log_c a) + b(log_a b + log_c b) + c(log_a c + log_b c)$

……..10 puncte

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $0 < a \leq b \leq c < 1$

Demonstrăm că $alog_b a + blog_a b \leq alog_a b + blog_b a \Leftrightarrow a(log_b a - log_a b) - b(log_b a - log_a b) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)(log_b a - log_a b) \le 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(log_b^2 a-1)}{log_b a} \le 0$ care este adevărată (Cum $0 < a \le b \le c < 1$ obținem $log_b a > 0, log_b a \ge log_a b \Leftrightarrow log_b^2 a - 1 \ge 0, a - b \le 0$)

Analog demonstrăm $clog_b c + blog_c b \le clog_c b + blog_b c$ și $alog_c a + clog_a c \le alog_a c + clog_c a$

……..10 puncte

Atunci, $log_a(a^2 + b^2 + c^2) + log_b(a^2 + b^2 + c^2) + log_c(a^2 + b^2 + c^2) \le a(1 + log_a b + log_a c) + b(1 + log_b a + log_b c) + c(1 + log_c a + log_c b)$ de unde rezultă relația cerută.

…….5 puncte

Problema 3

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, unde $n \ge 3$ este un număr natural. Considerăm în planul complex punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ și P de afixe $\varepsilon, 2\varepsilon^2, ..., n\varepsilon^n$ și z, cu $|z|$=1.

Știind că $\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\bar{z}\right) \le -\frac{65}{12}$ și $PA_1^2 + PA_2^2 + ... + PA_n^2 = \frac{9n^2}{2}$, să se arate că n=6.

Barem:

$\sum_{k=1}^{n} PA_k{}^2 = \sum_{k=1}^{n} |z - k\varepsilon^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z - k\varepsilon^k)(\bar{z} - k\bar{\varepsilon}^k) = \sum_{k=1}^{n} (|z|^2 - kz\bar{\varepsilon}^k - k\bar{z}\varepsilon^k + k^2) = n - z\sum_{k=1}^{n} k\bar{\varepsilon}^k - \bar{z}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon^k + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ……10 puncte

Fie $S = \sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon^k$

$S - \varepsilon S = \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n - n\varepsilon^{n+1} = -n\varepsilon$

$S = \frac{n\varepsilon}{\varepsilon - 1}$

$\sum_{k=1}^{n} PA_k{}^2 = n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2nRe\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\bar{z}\right) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7}{6} - 2Re\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\bar{z}\right)$ ……..10 puncte

Se obține $(n-6)^2 - \frac{65}{2} - 6Re\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\bar{z}\right) = 0$ și cum $Re\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\bar{z}\right) \le -\frac{65}{12}$ rezultă că $(n-6)^2 \le 0$, deci n=6.

……5 puncte

Problema 4

Să se determine toate funcțiile $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ cu proprietatea $|f(i) - f(j)| \ge |i - j|$, pentru orice $i, j = \overline{1,n}$.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT- JUNIOR

februarie-martie 2019

Barem:

Demonstrăm că funcția este injectivă.

Pentru $i,j=\overline{1,n}$, cu $f(i)=f(j)\Rightarrow|f(i)-f(j)|=0\geq|i-j|\Rightarrow i=j$, prin urmare funcția este injectivă.

Cum $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$, înseamnă că funcția este bijectivă. …….2 puncte.

Arătăm că $f(1)\in\{1,n\}$.

Dacă $f(1)=a$, cu $1<a<n$, avem $\prod_{i=2}^{n}|f(i)-f(1)|=\prod_{\substack{i=1\\i\neq a}}^{n}|i-a|=(a-1)!\cdot(n-a)!$ (1)

Iar $\prod_{i=2}^{n}|i-1|=(n-1)!$ (2)

Pentru $a\neq 1$ și $a\neq n$ avem $(a-1)!\cdot(n-a)!<(n-1)!$ (3)

Din (1), (2), (3), se obține $\prod_{i=2}^{n}|f(i)-f(1)|<\prod_{i=2}^{n}|i-1|$, ceea ce contrazice ipoteza. …….10 puncte

Dacă $f(1)=1$:

$|f(n)-f(1)|\geq n-1\Leftrightarrow f(n)=n$.

$|f(n-1)-f(1)|\geq n-2\Leftrightarrow f(n-1)=n-1$

Se demonstrează prin inducție că $f(k)=k$, $\forall k=\overline{1,n}$. …….7 puncte

Dacă $f(1)=n$:

$|f(n)-f(1)|\geq n-1\Leftrightarrow|f(n)-n|\geq|1-n|\Leftrightarrow f(n)=1$.

Analog, $f(n-1)=2$,…, $f(2)=n-1$. ……..6 puncte

Așadar, funcțiile căutate sunt $f_1(i)=i,\ \forall i=\overline{1,n}$ și $f_2(i)=n+1-i,\ \forall i=\overline{1,n}$.