CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

SUBIECTE
proba de matematică

Clasa a XI-a

Subiectul I

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ două matrice pătratice astfel încât $AB = BA,\ A^3 = I_n$ și $B^3 = -2I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n. Să se arate că matricea $A + B + I_n$ este nesingulară.

Subiectul II

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru fiecare $k \in \{1,2,...,n\}$ se consideră matricele $A_k, B_k \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$A_k \cdot B_k = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det\left[\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \cdot A_k + A_k^{-1} \cdot B_k^{-1}\right)\right]$.

Subiectul III

Fie șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ date de relațiile: $x_0 > -1,\ y_0 > -1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_n}$ și $y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrați că șirurile sunt convergente și determinați limitele lor.

Subiectul IV

Să se determine funcțiile $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietățile:

1) $f\left(x \cdot f(y)\right) = f\left(\dfrac{x}{y}\right),\ \forall x, y \in (0,\infty)$ și
2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 25 puncte.