CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT -JUNIOR

februarie-martie 2019

BAREME
proba de matematică

SUBIECT UL I.

a) Arătați că $\sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$, $x, y > 0$.

b) Arătați că $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c+d}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b+d}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geq 2;\ a,b,c,d > 0$.

Barem.

a) $\sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$ ……5p

$xy \geq \dfrac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ ……..5p

b) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}\cdot 1} \geq \dfrac{2}{\dfrac{b+c+d}{a}+1} = \dfrac{2a}{a+b+c+d}$ ……2,5p

Obtinerea relațiilor analoage……2,5x3=7,5p.
Însumarea relațiilor și obținerea inegalității cerute ……..5p.

SUBIECTUL II.

Fie $a,b,c \in (0;\infty)$ astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$.

a) Arătați că $\dfrac{a^3+a^2}{bc+1} = a^3$.

b) Arătați că $\dfrac{a^3+a^2}{bc+1}+\dfrac{b^3+b^2}{ca+1}+\dfrac{c^3+c^2}{ab+1} \geq 3$.

Barem.

a) $\dfrac{a^3+a^2}{bc+1} = \dfrac{a^3+a^2}{bc+abc} = \dfrac{a^2(a+1)}{bc(a+1)} = \dfrac{a^2}{bc} = a^3$ ……10p

b) Analog $\dfrac{b^3+b^2}{ca+1} = b^3; \dfrac{c^3+c^2}{ab+1} = c^3$.

$\dfrac{a^3+a^2}{bc+1} + \dfrac{b^3+b^2}{ca+1} + \dfrac{c^3+c^2}{ab+1} = a^3+b^3+c^3$ ……5p

$a^3+b^3+c^3-3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$ ……5p

Deducem că $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3$……5p.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT -JUNIOR

februarie-martie 2019

SUBIECTUL III

Fie $ABCA'B'C'$ prismă triunghiulară regulată cu $AB = 2x, AA' = x\sqrt{6}$ .Arătați că $(A'BC) \perp (C'AB)$.

Barem .

$(A'BC) \cap (C'AB) = BQ, \{Q\} = AC' \cap A'C$ ……..5p

Fie $AS \perp BQ, S \in BQ.$

$\Delta ASB \equiv \Delta CSB \Rightarrow < ASB \equiv < CSB = 90^\circ$

$< ((A'BC),(C'AB)) = < ASC.$……..5P

$d(C', AB) = C'C'' = 3x \Rightarrow A_{BQA} = \dfrac{3x^2}{2}$

$AS = x\sqrt{2}$, analog $CS = x\sqrt{2}$.……10p

În ΔASC, din Reciproca Teoremei lui Pitagora $< ASC. = 90^\circ$ ……5p

SUBIECTUL IV.

Fie tetraedrul VABC în care construim $[VM, [VN, [VP$ bisectoarele unghiurilor $\angle AVB, \angle BVC, \angle CVA$, $M \in [AB]; N \in [BC], P \in [AC]$.

a) Să se demonstreze că dreptele AN, BP și CM sunt concurente

b) Dacă în plus $VB = VC$ și $BC \perp (VAN)$ arătați că :

$$A_{NPM} = \frac{1}{4} A_{ABC} \Leftrightarrow \Delta NPM \sim \Delta ABC .$$

Barem.

a)Scriem teorema bisectoarei în ΔVAB, ΔVAC şi în ΔVBC. 5p

Înmulţind relaţiile obţinem $\frac{VA}{VB} \cdot \frac{VB}{VC} \cdot \frac{VC}{VA} = 1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$.

Din reciproca Teoremei lui Ceva rezultă concluzia. 5p

b)Din $VB = VC \Rightarrow [VN]$ mediană $\Rightarrow$ N mijlocul lui $[BC]$

Din $BC \perp (VAN) \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp AN \\ [AN] \text{ mediană în } \Delta ABC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$.

N mijlocul lui $[BC] \Rightarrow \frac{BN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MB} \cdot 1 \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} \overset{R.T.Thales}{\Longrightarrow} MP \| BC. \qquad (1)$$

$MP \| BC \overset{T.F.A}{\Longrightarrow} \Delta AMP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC} \Rightarrow \Delta AMP$ isoscel cu $[AM] \equiv [AP] \Rightarrow [MB] \equiv [PC]$

$\Delta MBN \equiv \Delta PCN \Longrightarrow [NM] \equiv [NP]$

Fie S mijlocul segmentului $[MP] \Longrightarrow S \in AN$.

Avem $MS \parallel BN \Longrightarrow \frac{SN}{AN} = \frac{MB}{AB}$ ...5p

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT -JUNIOR

februarie-martie 2019

Implicatia directă „$\Longrightarrow$"

$$\frac{A_{\Delta NPM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{\frac{NS\cdot MP}{2}}{\frac{AN\cdot BC}{2}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{SN}{AN}\cdot\frac{MP}{BC} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{MB}{AB}\cdot\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$4AM\cdot MB = AB^2 \Longrightarrow 4AM\cdot MB = (AM+MB)^2 \Longrightarrow 0 = (AM-MB)^2 \Longrightarrow$$

$$AM = MB \Longrightarrow M \text{ mijlocul } [AB] \overset{(1)}{\Longrightarrow} [MP] \ \textit{linie mijlocie} \Longrightarrow$$

$$\frac{MP}{CB} = \frac{MN}{CA} = \frac{NP}{AB} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \Delta NPM \sim \Delta ABC$$

...5p

Implicatia reciprocă „$\Longleftarrow$"

$$\Delta NPM \sim \Delta ABC \Longrightarrow \Delta NPM \sim \Delta AMP \Longrightarrow \Delta NPM \equiv \Delta AMP \Longrightarrow$$

$$NP = AM = \frac{AB}{2} \Longrightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{A_{\Delta NPM}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

.....5p.