CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
februarie-martie 2019

SOLUŢII ŞI BAREME
proba de matematică
clasa a IX-a

Subiectul I

Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $x^2+2f(xy)+y^2=f^2(x+y),\quad \forall x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N}$.

Soluţie:

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{N}^2\Rightarrow f=1_{\mathbb{N}}$ este o soluţie a ecuaţiei……5p

$x=y=0\Rightarrow 2f(0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)\in\{0,2\}$ ……..5p

$f(0)=0=f^2(y)=y^2\Rightarrow f(y)=y,\quad \forall y\in\mathbb{N}.$

$f(0)=2\Rightarrow f^2(y)=y^2+4,\quad \forall y\in\mathbb{N}$ ……5p

$y=1\Rightarrow f^2(1)=5\Rightarrow f(1)=\sqrt{5}\notin\mathbb{N}$ ……...5p

Deci $1_{\mathbb{N}}$ este singura soluţie a ecuaţiei……..5p

Subiectul II

a) Fie $x,y,z>0$ trei numere reale cu $x+y+z=1$. Să se arate că $\frac{1+xy}{x+y}+\frac{1+yz}{y+z}+\frac{1+zx}{z+x}\geq 5$.

b) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ avem:

$$\frac{1}{(1!+2!)^2}+\frac{1}{(2!+3!)^2}+\frac{1}{(3!+4!)^2}+\ldots+\frac{1}{(n!+(n+1)!)^2}\geq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}\right)^2 .$$

Soluţie:

a) $\sum\frac{1+xy}{x+y}\geq 5\Leftrightarrow\sum\left(\frac{1+xy}{x+y}-1\right)\geq 2\Leftrightarrow\sum\frac{1+xy-x-y}{x+y}\geq 2\Leftrightarrow\sum\frac{(1-x)(1-y)}{1-z}\geq 2$ …..3p

Din inegalitatea mediilor obţinem:

$$\sum\frac{(1-x)(1-y)}{1-z}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{(1-x)(1-y)}{1-z}+\frac{(1-y)(1-z)}{1-x}\right)\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\sum 2\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{1-z}\cdot\frac{(1-y)(1-z)}{1-x}}=\sum(1-y)=2$$
……..7p

b) În inegalitatea CBS: $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$ punem $a_k=1$ şi $b_k=\frac{1}{k!+(k+1)!}$

Obţinem $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!+(k+1)!}\right)^2\leq n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k!+(k+1)!)^2}$ (1)……10p

Dar $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!+(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$ ……..5p

Înlocuind în (1) obţinem inegalitatea cerută.

Subiectul III

Fie triunghiul *ABC* şi *D,E,F* mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$. Notăm cu *I* centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*, *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC* şi I' centrul cercului înscris în triunghiul *DEF*. Să se arate că punctele *I*, I' şi *G* sunt coliniare.

Soluţie:

Notăm cu *a*, *b*, *c* şi a',b',c' lungimile laturilor triunghiului *ABC*, respectiv *DEF* şi $\overrightarrow{r_X}$ vectorul de poziţie al punctului *X*.

Avem $\overrightarrow{r_I}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}\right)$ ……..5p

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{r_{I'}}=\frac{1}{a'+b'+c'}\left(a'\overrightarrow{r_D}+b'\overrightarrow{r_E}+c'\overrightarrow{r_F}\right)=\\ \frac{a}{2(a+b+c)}(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})+\frac{b}{2(a+b+c)}(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C})+\frac{c}{2(a+b+c)}(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B})=\\ \frac{1}{a+b+c}\left(\left(\frac{b+c}{2}\right)\overrightarrow{r_A}+\left(\frac{a+c}{2}\right)\overrightarrow{r_B}+\left(\frac{b+a}{2}\right)\overrightarrow{r_C}\right).\end{array}\right\}$$ ……..10p

$\overrightarrow{r_G}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$ …….5p

Se obtine: $\overrightarrow{r_G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r_I}+\frac{2}{3}\overrightarrow{r_{I'}}$, de unde concluzia……..5p

Subiectul IV

Tangentele în *A* şi *B* la cercul circumscris triunghiului isoscel *ABC*, cu $AC>AB=BC$ se intersectează în punctul *P*, iar mediatoarea lui $[BC]$ taie *BC* în *M* şi *AC* în *N*. Demonstraţi că $\left|\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{BN}\right|=3MN$.

Soluţie:

Notăm $AC=b,\ AB=BC=a$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (1)

$\sphericalangle ABP\equiv\sphericalangle BAP\equiv\sphericalangle ACB \Rightarrow \Delta BPA\sim\Delta CBA \Rightarrow \frac{BP}{CB}=\frac{BA}{CA}\Leftrightarrow BP=\frac{a^2}{b}$ ……5p

$\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle CAB \Rightarrow BP \parallel CA \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{BP}{CA}\overrightarrow{CA} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA}$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă $\overrightarrow{MP} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (3)……5p

Fie E mijlocul lui $[AC]$. Atunci $\Delta BEC \sim \Delta NMC \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{MC}{EC} \Leftrightarrow CN = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ (4)……..5p

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (5)……5p

(3),(4),(5) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN} = 3\frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{MN} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN}\right| = 3MN$ ……..5p