CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

SOLUȚII ȘI BAREME
proba de matematică

Clasa a XI-a

Subiectul I

Fie $A, B \in M_n(C)$ două matrice pătratice astfel încât $AB = BA,\ A^3 = I_n$ și $B^3 = -2I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n. Să se arate că matricea $A + B + I_n$ este nesingulară.

Soluție:

Din $A^3 = I_n$, rezultă că $A^3 + I_n = 2I_n$, adică $(A + I_n)(A^2 - A + I_n) = 2I_n$. .....5 puncte

Atunci $\det[(A + I_n)(A^2 - A + I_n)] = \det(2I_n) \Rightarrow A + I_n$ este nesingulară.....3 puncte

La fel $B^3 = -2I_n \Rightarrow B^3 + I_n = -I_n \Rightarrow (B + I_n)(B^2 - B + I_n) = -I_n$, deci $B + I_n$ este nesingulară....2 puncte

Adunăm cele două relații și avem : $A^3 + B^3 = -I_n$, adică $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = -I_n$, deci $A + B$ nesingulară ..... 5 puncte

Cum A și B comută, un calcul simplu conduce la $(A + B + I_n)^3 = 3(A + B)(A + I_n)(B + I_n)$ ..... 5 puncte

$\det[(A + B + I_n)^3] = 3^n \cdot \det(A + B) \cdot \det(A + I_n) \cdot \det(B + I_n) \neq 0$, adică $A + B + I_n$ nesingulară...5 puncte

Subiectul II

Fie $n \in N^*$. Pentru fiecare $k \in \{1,2,...,n\}$ se consideră matricele $A_k, B_k \in M_2(R)$ astfel încât $A_k \cdot B_k = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det\left[\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \cdot A_k + A_k^{-1} \cdot B_k^{-1}\right)\right]$.

Soluție:

$\det(A_k \cdot B_k) = \det(B_k \cdot A_k) = 1$ și deci $A_k \cdot B_k$ și $B_k \cdot A_k$ sunt inversabile, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$.....2 puncte

$Tr(A_k \cdot B_k) = Tr(B_k \cdot A_k) = k$, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$..... 3 puncte

$(B_k \cdot A_k)^2 - Tr(B_k \cdot A_k)(B_k \cdot A_k) + \det(B_k \cdot A_k) \cdot I_2 = O_2$ ..... 5 puncte

Rezultă că $(B_k \cdot A_k)^2 - k(B_k \cdot A_k) + I_2 = O_2$, adică $(B_k \cdot A_k)^2 + I_2 = k(B_k \cdot A_k)$, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$.....5 puncte

Înmulțim cu $(B_k \cdot A_k)^{-1}$ și obținem:

$(B_k \cdot A_k) + (B_k \cdot A_k)^{-1} = kI_2$, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$.....2puncte

Atunci $\sum_{k=1}^{n}\left[B_k A_k + (B_k \cdot A_k)^{-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot I_2 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot I_2$ .....5 puncte

În final $\det\left[\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \cdot A_k + A_k^{-1} B_k^{-1}\right)\right] = \det\left[\frac{n(n+1)}{2} I_2\right] = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{2}$ .....3 puncte

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

Subiectul III

Fie șirurile $(x_n)_{n\in N}$ și $(y_n)_{n\in N}$ date de relațiile: $x_0 > -1, y_0 > -1, x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_n}$ și $y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}, \forall n \in N$.

Demonstrați că șirurile sunt convergente și determinați limitele lor.

Soluție:

Prin inducție avem $x_n, y_n \in (0,1), \forall n \in N, n \geq 2.$ Din ipoteză, $x_{n+2} = \dfrac{1}{1+y_{n+1}} = \dfrac{1+x_n}{2+x_n}, \forall n \in N$ ... 3 puncte

Avem: $x_{n+2} - x_n = \dfrac{1+x_n}{2+x_n} - \dfrac{1+x_{n-2}}{2+x_{n-2}} = \dfrac{x_n - x_{n-2}}{(2+x_n)(2+x_{n-2})}, \forall n \in N, n \geq 2,$

deci $\operatorname{sgn}(x_{n+2} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-2}), \forall n \geq 2$ .....3 puncte

Rezultă că $(x_{2k})_{k\in N}$ și $(x_{2k+1})_{k\in N}$, sunt monotone, deci convergente către a, respectiv b.....5 puncte

Trecând la limită în recurența $x_{2k+2} = \dfrac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}}$, rezultă $a = \dfrac{1+a}{2+a}$, adică $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0,1)$. ... 5 puncte

Analog pentru $x_{2k+1} = \dfrac{1+x_{2k-1}}{2+x_{2k-1}}$, obținem $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0,1)$. ..... 3 puncte

Deducem că $(x_n)_{n\in N}$ este convergent la $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .....3 puncte

Folosim $y_n = \dfrac{1}{1+x_{n-1}}, \forall n \in N^*$ și obținem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. .....3 puncte

Subiectul IV

Să se determine funcțiile $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietățile:

1) $f\left(x \cdot f(y)\right) = f\left(\dfrac{x}{y}\right), \forall x, y \in (0,\infty)$ și

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$

Soluție:

Notăm $f(1) = a, a \in (0,\infty)$.

Din 1), pentru $y = 1$, rezultă că $f(xa) = f(x), \forall x \in (0,\infty)$ .....3 puncte

Prin inducție, după $n \in N^*$, obținem:

$f\left(\dfrac{x}{a^n}\right) = f(x) = f(x \cdot a^n), \forall x \in (0,\infty), \forall n \in N^*$ ..... 5 puncte

Presupunând că $a \in (0,1)$, obținem $f(1) = f\left(\dfrac{1}{a^n}\right), \forall n \in N^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = 0,$

adică $f(1) = 0$. Fals. .....3 puncte

Pentru $a \in (1,\infty)$, rezultă $f(1) = f\left(a^n\right), \forall n \in N^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(a^n\right) = 0,$

adică $f(1) = 0$. Fals. .....2 puncte

Prin urmare, $f(1) = 1$. ..... 1 punct

Să presupunem că $\exists b \in R^* \setminus \{1\}$ astfel încât $f(b) = 1$.

Din 1), pentru $y=b$, rezultă că $f(x)=f\left(\frac{x}{b}\right), \forall x\in(0,\infty)$.

Prin inducție, ca mai sus, rezultă că $f\left(\frac{x}{b^n}\right)=f(x)=f(x\cdot b^n), \forall x\in(0,\infty), \forall n\in N^*$ .....3 puncte

$b\in(0,1)\Rightarrow f(1)=1=f\left(\frac{1}{b^n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0\Rightarrow 1=0$, fals ..... 3 puncte

$b\in(1,\infty)\Rightarrow f(1)=1=f\left(b^n\right)\xrightarrow{n\to\infty}0\Rightarrow 1=0$, fals ..... 1 punct

În concluzie $\forall\alpha>0$, cu $f(\alpha)=1\Rightarrow\alpha=1$ ..... 1 punct

În 1) facem $x=y$. Obținem $f\left(x\cdot f(y)\right)=f(1)=1, \forall x\in(0,\infty)$ ..... 2 puncte

Atunci $xf(x)=1, \forall x\in(0,\infty)$, adică $f(x)=\frac{1}{x}, \forall x\in(0,\infty)$. ..... 1 punct