CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie-martie 2019

SUBIECTE- CLASA a XII a
proba de matematică- individual

Problema 1

Se dă șirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(n+1)x} \cdot \cos^n(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos x \, dx$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}$.

***

Problema 2

Rezolvați ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ în Z_{13} și în Z_{19}, apoi deduceți că

247 divide $(3^{7^n-1} - 1)(7^{1^n-1} - 1), \forall n \in N$.

***

Problema 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Dacă există un număr întreg $n > 0$ astfel încât aplicațiile $f : G \to G,\ f(x) = x^n$ $g : G \to G,\ g(x) = x^{n+1}$ sunt morfisme de grupuri, iar funcția este surjectivă, atunci G este comutativ.

***

Problema 4

Fie $f : [1; \infty) \to R$ continuă astfel încât $f(x^p) \leq x^k f(x), \forall x \in [1; \infty)$, unde $k > 0, p > 1$.

Demonstraţi că pentru $a > 1$ are loc inegalitatea: $\int_1^a f(x)dx \leq a^{1-\frac{k}{p-1}} \cdot \ln a \cdot f(1)$.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 25 de puncte.