CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2022

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a X-a

Subiectul 1

Determinaţi numerele $x, y, z \in (1,\infty)$, ştiind că:

$$\log_{yz}\frac{x^2+4}{4\sqrt{yz}}+\log_{zx}\frac{y^2+4}{4\sqrt{zx}}+\log_{xy}\frac{z^2+4}{4\sqrt{xy}}=0$$

Soluție:

Avem $\log_{yz}\frac{x^2+4}{4\sqrt{yz}}=\log_{yz}\frac{x^2+4}{4}-\frac{1}{2}$ şi analoagele.

Relaţia din enunţ devine: $\log_{yz}\frac{x^2+4}{4}+\log_{zx}\frac{y^2+4}{4}+\log_{xy}\frac{z^2+4}{4}=\frac{3}{2}$, (1)...............................(5p)

Dar $\frac{x^2+4}{4}\geq x$, $(\forall)\ x\in(1,\infty)$ cu egalitate $\Leftrightarrow$ $x=2$.

Atunci $\log_{yz}\frac{x^2+4}{4}\geq\log_{yz}x=\frac{\lg x}{\lg y+\lg z}$ şi analoagele...(10p)

Însumăm cele 3 inegalităţi şi obţinem:

$\sum\log_{yz}\frac{x^2+4}{4}\geq\frac{\lg x}{\lg y+\lg z}+\frac{\lg y}{\lg z+\lg x}+\frac{\lg z}{\lg x+\lg y}$, (2)cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y=z=2$. .(5p)

Evident că $\lg x>0$, $\lg y>0$, $\lg z>0$ şi atunci notând cu S membrul drept al inegalităţii (2) avem:

$S+3=(\lg x+\lg y+\lg z)\left(\frac{1}{\lg x+\lg y}+\frac{1}{\lg y+\lg z}+\frac{1}{\lg z+\lg x}\right)\geq\frac{9}{2}$ cu egalitate $\Leftrightarrow$ $x=y=z$.

Deci $S\geq\frac{3}{2}$ şi ţinând cont de (1) rezultă că $S=\frac{3}{2}$. Aşadar $x=y=z=2$ ....(5p)

Subiectul 2

Să se arate că dacă $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$, atunci $2\leq|1-2z|+|2z^2-z+2|\leq 8$.

Soluție:

Fie $x=|1-2z|$. Cum $|z|=1$ rezultă imediat că $1\leq x\leq 3$.

$x^2=|1-2z|^2=(1-2z)(1-2\bar{z})=1-2(z+\bar{z})+4=5-2\cdot 2\operatorname{Re}(z)$ .Rezultă $\operatorname{Re}(z)=\frac{5-x^2}{4}$ ....(10p)

$|2z^2-z+2|=\left|\frac{2z^2-z+2}{z}\right|=|2z-1+2\bar{z}|=|4\operatorname{Re}(z)-1|=|4-x^2|$. ....(5p)

Fie funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x+|4-x^2|=\begin{cases}-x^2+x+4, & x\in[1,2]\\ x^2+x-4, & x\in[2,3]\end{cases}$.

Obținem $\min f(x)=f(2)=2$ și $\max f(x)=f(3)=8$ de unde rezultă inegalitatea cerută……….……(10p)

Subiectul 3

Fie $a\in(0,1)$ și $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^{b^2+b+1}=\log_a(b^2+b+1)$. Arătați că $[b]=-1$ și $a\ge\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ (prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a lui x).

Soluție:

Se observă că a^x și $\log_a x$ sunt funcții inverse. Cum $a\in(0,1)$ există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $a^{x_0}=\log_a x_0=x_0$

Atunci $b^2+b+1=a^{b^2+b+1}\in(0,1)$. Obținem $b^2+b+1<1\Leftrightarrow b\in(-1,0)$, adică $[b]=-1$ ……………………(10p)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2+x+1$. Cum $f_{\min}=f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$, rezultă că $b^2+b+1\ge\frac{3}{4}$. Funcția a^x este strict descrescătoare pentru $a\in(0,1)$.

Obținem: $\frac{3}{4}\le b^2+b+1=a^{b^2+b+1}\le a^{\frac{3}{4}}$. ………………………………………………………………(10p)

Din $a^{\frac{3}{4}}\ge\frac{3}{4}$, pentru $x>0$ rezultă că $\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^x$.

Luăm $x=\frac{4}{3}$ și obținem $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\ge\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ adică $a\ge\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ ………………………………………………..(5p)

Subiectul 4

Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ nu toate reale, astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $2(z_1+z_2+z_3)-3z_1z_2z_3\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\max(\arg z_1,\arg z_2,\arg z_3)\ge\frac{\pi}{6}$.

Soluție:

Fie $z_k=\cos t_k+i\sin t_k,\quad k\in\{1,2,3\}$. Condiția $2(z_1+z_2+z_3)-3z_1z_2z_3\in\mathbb{R}$ se scrie

$2(\sin t_1+\sin t_2+\sin t_3)=3\sin(t_1+t_2+t_3)\quad(1)$ ………………………………………………………………..(5p)

Să presupunem că $\max(t_1,t_2,t_3)<\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_1,t_2,t_3<\frac{\pi}{6}$ și fie $t=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$. Atunci $0<t<\frac{\pi}{6}$, iar funcția sinus este concave pe $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\frac{1}{3}(\sin t_1+\sin t_2+\sin t_3)\le\sin\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\quad(2)$ …………………………………..(5p)

Din (1) și (2), obținem $\frac{\sin(t_1+t_2+t_3)}{2}\le\sin\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$ ……………………………………………………..(5p)

Rezultă $\sin 3t \le 2\sin t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t \le 2\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t - \sin t \ge 0 \Leftrightarrow 4\sin t(\sin^2 \mathrm{t} - \frac{1}{4}) \ge 0$. (3)……..(5p)

Deoarece $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin t > 0$ și $\sin^2 t - \frac{1}{4} < 0$ adică $\sin t(\sin^2 \mathrm{t} - \frac{1}{4}) < 0$ .Contradicție cu (3).

Rezultă deci $\max(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3) \ge \frac{\pi}{6}$ ……………………………………………………………………………(5p)