CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2022

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a XI-a

Subiectul 1

Se consideră șirul $(u_n)_{n\geq 1}$, definit prin relația de recurență

$$u_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & 0 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \mathrm{n}\geq 1,\ u_1\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$

Dacă șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este convergent, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\prod\limits_{k=2}^{n}(1+u_1\cdot\ldots\cdot u_k)$.

Subiectul 2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

a) f este injectivă,

b) $f(0)\neq 0$,

c) $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

Să se arate că funcția f nu are proprietatea lui Darboux.

<u>*Soluție*</u>:

Presupunem prin absurd că funcția *f* are proprietatea lui Darboux.

Fiind injectivă și având proprietatea lui Darboux, funcția *f* este strict monotonă. ....10 puncte.

Prin urmare, funcția are cel mult discontinuități de speța I. Dar, având proprietatea lui Darboux, nu poate avea discontinuități de speța I, prin urmare funcția f este continuă.......................................10 puncte.

Trecând la limită când $x\to 0$ în ipoteza c), obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)=-\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, adică $f(0)=-f(0)$.

Rezultă $f(0)=0$, ceea ce contrazice ipoteza b)..5 puncte.

Subiectul 3

Considerăm șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_1=2,\ y_1=1$ și $x_{n+1}=x_n^2+1,\ y_{n+1}=x_n\cdot y_n$, $\mathrm{n}\geq 1$.

a) Arătați că $\frac{x_n}{y_n}<\sqrt{7},\ \forall n\geq 1$.

b) Demonstrați că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n=\frac{x_n}{y_n}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} z_n<\sqrt{7}$.

<u>*Soluție*</u>:

a) Se arată prin inducție matematică că $y_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ .... 3 puncte.

Apoi, tot prin inducție, că $z_n = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \ldots + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$................. 3 puncte.

Avem că $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător..3 puncte.

Deoarece $x_2 = 5$, avem $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \geq 2 \cdot 5^{k-1},\ \forall k \in \mathbb{N}$, de unde se obține că $\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k} \leq \frac{1}{2 \cdot 5^{k-1}},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

....3 puncte.

Atunci,

$$z_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 5^{n-2}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{5}} = 2 + \frac{5}{8} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right] < 2 + \frac{5}{8} = \frac{21}{8} < \sqrt{7}$$ ....3 puncte.

b) Avem $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}}{\frac{x_n}{y_n}} = \frac{x_{n+1} \cdot y_n}{x_n \cdot y_{n+1}} = \frac{x_{n+1} \cdot y_n}{x_n^2 \cdot y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n^2} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2} = 1 + \frac{1}{x_n^2} > 1,$

deci $z_{n+1} > z_n,\ n \in \mathbb{N}^*$ ....5 puncte.

Cum șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este și mărginit, rezultă că este și convergent.

De la punctul a), avem că $z_n < \frac{21}{8}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \leq \frac{21}{8} < \sqrt{7}$ ....5 puncte.

Subiectul 4

a) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că $\det(I_2 + AB) = \det(I_2 + BA)$.

b) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(AB - BA) < 0$, arătați că $\det(I_2 + AB) < \det\left(I_2 + \frac{AB + BA}{2}\right)$.

<u>*Soluție*</u>:

a) Calcul direct..5 puncte.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \det(x(AB - BA) + I_2 + BA)$

Se demonstrează că $f(0) = f(1)$ ....5 puncte

și cum *f* este funcție de gradul al II-lea, rezultă $x = \frac{1}{2}$ este abscisa vârfului parabolei.......5 puncte.

Deoarece coeficientul lui x^2 este $\det(AB-BA)<0,$ conform ipotezei, avem că $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim pentru funcție..5puncte.

Prin urmare, $f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right),$ de unde se obține inegalitatea cerută.

....5 puncte.