CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2022

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie a și b două elemente ale unui grup $(G,\cdot)$ astfel încât $a\cdot b\cdot a=b\cdot a^2\cdot b,\quad a^3=e$ și $b^{2n-1}=e,\quad n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Să se demonstreze că $b=e$.

Soluție:

Avem $a\cdot b\cdot a=b\cdot a^{-1}\cdot b\Rightarrow a\cdot b=b\cdot a^{-1}\cdot b\cdot a^{-1}\Rightarrow a\cdot b^2=b\cdot a^{-1}\cdot(b\cdot a^{-1}\cdot b)=b\cdot a^{-1}\cdot(\mathrm{a}\cdot b\cdot a)=\mathrm{b}^2\cdot a$,

deci a și b^2 comută. ……………………………………………………………..………………(10p)

Arătăm că a și b^{2n} comută:

$a\cdot b^{2n}=a\cdot\underbrace{b^2\cdot b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2}_{de\ n\ ori}=b^2\cdot a\cdot\underbrace{b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2}_{de\ n-1\ ori}=b^2\cdot b^2\cdot a\cdot\underbrace{b^2\cdot\ldots\cdot b^2}_{de\ n-2\ ori}=\ldots=\underbrace{b^2\cdot b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2}_{de\ n\ ori}\cdot a=b^{2n}\cdot a$ . .(10p)

Cum $b^{2n-1}=e\Rightarrow b^{2n}=b$ și deci $a\cdot b=b\cdot a$ (1)

Din ipoteză avem $a\cdot b\cdot a=b\cdot a^2\cdot b$ și folosind (1) obținem $a\cdot a\cdot b=a^2\cdot b\cdot b\Rightarrow b=b^2\Rightarrow b=e$ ………..(5p)

Subiectul 2

Fie H și N subgrupuri proprii ale unui grup $(G,\cdot)$ având elementul neutru e. Dacă $x^2=e,\forall x\in G\backslash(H\cup N)$, demonstrați că $(H\cap N,\cdot)$ este grup comutativ.

Soluție:

Un grup nu poate fi scris ca reuniunea a două subgrupuri proprii, deci există $x\in G\backslash(H\cup N)$.

De asemenea, se arată ușor că $(H\cap N,\cdot)$ este grup.

Pentru $a\in H\cap N$ obținem că $ax\in G\backslash(H\cup N)$ (1)……………………………………..……………………(10p)

Din relația (1), conform ipotezei avem:

$(ax)^2=e=x^2\Rightarrow axax=xx\Rightarrow axa=x\Rightarrow ax=xa^{-1},\forall a\in H\cap N$ (2) ....(5p)

Fie acum $a_1,a_2\in H\cap N$. Cum $a_1a_2\in H\cap N$ se obține succesiv:

$$a_1a_2=a_1a_2x^2=((a_1a_2)x)x=\left(x(a_1a_2)^{-1}\right)x=\left(xa_2^{-1}\right)\left(a_1^{-1}x\right)\overset{(2)}{=}(a_2x)(xa_1)=a_2x^2a_1=a_2a_1.$$

Cum a_1,a_2 au fost alese arbitrar rezultă că $(H\cap N,\cdot)$ este grup comutativ...(10p)

Subiectul 3

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\left\{x^2\sin\frac{1}{x}\right\}dx$.

Soluție:

Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y-y}{y^2}=0$, de unde rezultă, conform teoremei de medie că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\right)dx=0$ ....(5p)

Considerăm funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$. Avem $f'(x)=x\cos\frac{1}{x}\left(2tg\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)>0,\forall x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$. Din inegalitățile $x-x^2<\sin x<x,\forall x>0$ deducem că $n^2\sin\frac{1}{n}<n<(n+1)^2\sin\frac{1}{n+1}$.

Cum funcția f este continuă rezultă că există $c_n\in(n,n+1)$ cu $f(c_n)=n$ ....(5p)

De aici rezultă că $\int_n^{n+1}[f(x)]dx=\int_n^{c_n}(n-1)dx+\int_{c_n}^{n+1}ndx=2n-c_n$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\left([f(x)]-n\right)dx=\lim\limits_{n\to\infty}(n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(c_n)-c_n\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ ....(10p)

Obținem: $\int_n^{n+1}\{f(x)\}dx=\int_n^{n+1}\left(f(x)-[f(x)]\right)dx=\int_n^{n+1}\left(f(x)-x\right)dx+\int_n^{n+1}(x-n)dx-\int_n^{n+1}\left([f(x)]-n\right)dx=$

$=\int_n^{n+1}\left(f(x)-x\right)dx-\int_n^{n+1}\left([f(x)]-n\right)dx+\frac{1}{2}$, deci limita cerută este egală cu $\frac{1}{2}$.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2022

Subiectul 4

a) Fie funcțiile continue $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1$. Arătați că:

$$\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx-1\right)^2\le\left(\int_0^1 f^2(x)dx-1\right)\left(\int_0^1 g^2(x)dx-1\right)$$

b) Fie funcția continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\cdot f(x)dx=1$.

Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx\ge 4$.

Soluție:

a) Avem $1+t\cdot\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int_0^1 g(x)\cdot(1+t\cdot f(x))dx,\quad \forall t\in\mathbb{R}$ ……………………………………….(5p)

Ridicând la pătrat și utilizând inegalitatea **C-B-S**

($\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ unde $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții integrabile), obținem:

$$\left(1+t\cdot\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\le\int_0^1 g^2(x)dx\cdot\int_0^1(1+t\cdot f(x))^2dx\quad\Leftrightarrow$$

$$1+2t\cdot\int_0^1 f(x)g(x)dx+t^2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_0^1 g^2(x)dx\cdot\left(1+2t+t^2\int_0^1 f^2(x)dx\right),\quad\forall t\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow$$

$$t^2\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 g^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\right)+t\cdot\left(2\int_0^1 g^2(x)dx-2\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)+\left(\int_0^1 g^2(x)dx-1\right)\ge 0,\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Rezultă deci că discriminantul trinomului de mai sus este negativ.

Cum $\Delta=\left(2\int_0^1 g^2(x)dx-2\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2-4\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 g^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2(x)dx-1\right)$

condiția $\Delta\le 0$ revine la

$$\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^2-2\cdot\int_0^1 g^2(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)g(x)dx+\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2-\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^2+$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 g^2(x)dx+\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\cdot\int_0^1 g^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow\quad\int_0^1 g^2(x)dx\cdot\left[\int_0^1 g^2(x)dx-2\cdot\int_0^1 f(x)g(x)dx-\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 g^2(x)dx+\int_0^1 f^2(x)dx+\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 - 2\int_0^1 f(x)g(x)dx + 1 \le \int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 g^2(x)dx - \int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 g^2(x)dx + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx - 1\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx - 1\right)\left(\int_0^1 g^2(x)dx - 1\right)$$ ……………………………………………(10p)

b) Înlocuim în inegalitatea de la a), $g(x) = 2x$ și obținem:

$$\left(\int_0^1 f(x)\cdot 2x dx - 1\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx - 1\right)\left(\int_0^1 (2x)^2 dx - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(2\int_0^1 x\cdot f(x)dx - 1\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx - 1\right)\cdot\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f^2(x)dx \ge 4$$ ……..(10p).