CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2022

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

Se consideră suma $S(n) = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $\sqrt{(2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Rezolvați ecuația $S(n) = 10$.

c) Calculați $[S(2022)]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

SUBIECTUL II

Se dă expresia $E(x) = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16$.

a) Arătați că $E(\sqrt{5+4\sqrt{3}})$ este multiplu de 12.

b) Determinați perechile de numere întregi (m, n) cu proprietatea $E(n) = m^4$.

SUBIECTUL III

Pe planul triunghiului echilateral ABC se construiesc perpendicularele MA și NC, punctele M și N fiind de aceeași parte a planului (ABC). Se știe că $MA = AB$ și $NC = \frac{AB}{2}$, iar punctul O este mijlocul segmentului MB.

a) Demonstrați că $NO \perp (MAB)$.

b) Calculați distanta de la punctul A la planul (MBN), în funcție de latura a a triunghiului ABC.

c) Determinați măsura unghiului dintre dreptele MB și AN.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ și punctele M și N situate pe muchiile SB și SC astfel încât suma $x = AM + MN + ND$ este minimă.

a) Demonstrați că $MN \parallel (ABC)$.

b) Dacă valoarea minimă a lui x este $6\sqrt{3}$ și muchia laterală a piramidei este de lungime 6, calculați măsura unghiului ASB.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Se acordă 25 de puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect.

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2022

SUBIECTE și bareme
proba de matematică
clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

Se consideră suma $S(n) = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $\sqrt{(2n+1)+2\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Rezolvați ecuația $S(n) = 10$.

c) Calculați $[S(2022)]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Soluție:

a) Verifică prin calcul direct $(2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} = \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2$ (8p)

b) $S(n) = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (2p)

$S(n) = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1$ (4p)

$S(n) = 10 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 = 10 \Leftrightarrow n = 120$ (4p)

c) $[S(2022)] = \left[\sqrt{2023} - 1\right]$, (3p)

$\sqrt{2023} \in (44, 45)$ (2p)

$\Longrightarrow [S(2022)]=43$ (2p)

SUBIECTUL II

Se dă expresia $E(x) = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16$.

a) Arătați că $E(\sqrt{5+4\sqrt{3}})$ este multiplu de 12.

b) Determinați perechile de numere întregi (m, n) cu proprietatea $E(n) = m^4$.

Soluție:

a) $E(x) = (x^2-9)(x^2-1) + 16 = x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2-5)^2$ (5p)

$\Rightarrow E\left(\sqrt{5+4\sqrt{3}}\right) = \left(\sqrt{5+4\sqrt{3}}^2 - 5\right)^2 = \left(5+4\sqrt{3}-5\right)^2 = 48 \vdots 12$ (5p)

b) $E(n) = m^4 \Rightarrow (n^2-5)^2 = m^4 \Rightarrow (n^2-5-m^2)(n^2-5+m^2) = 0$ (3p)

$\Rightarrow n^2 - m^2 = 5$ sau $n^2 + m^2 = 5$ (3p)

$\Rightarrow (n-m)(n+m) = 5$ sau $n^2 + m^2 = 5$ (3p)

$\Rightarrow (n; m) \in \{(\pm 3; \pm 2); (\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 1)\}$ (6p)

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2022

SUBIECTUL III

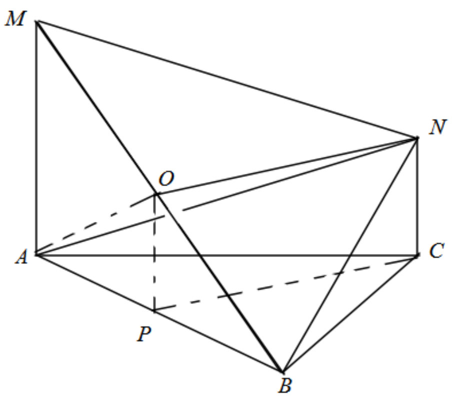
Pe planul triunghiului echilateral ABC se construiesc perpendicularele MA şi NC, punctele M şi N fiind de aceeaşi parte a planului (ABC). Se ştie că $MA = AB$ şi $NC = \frac{AB}{2}$, iar punctul O este mijlocul segmentului MB.

a) Demonstraţi că $NO \perp (MAB)$.

b) Calculaţi distanta de la punctul A la planul (MBN), în funcţie de latura a a triunghiului ABC.

c) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele MB şi AN.

Soluție:



a) Dacă P este mijlocul segmentului AB, OP linie mijlocie în ΔMAB, deci $OP \parallel AM$ şi $OP = \frac{AM}{2}$ (2p)

$ONCP$ este paralelogram pentru că $OP \parallel NC$, $OP = NC$ deci $ON \parallel CP$ (2p)

$MA \perp (ABC)$, $MA \subset (MAB)$ deci $(MAB) \perp (ABC)$ (2p)

$(MAB) \cap (ABC) = AB$, $(MAB) \perp (ABC)$ şi $CP \perp AP$ (mediană în triunghi echilateral) $\Rightarrow CP \perp (MAB)$ (2p)

$ON \parallel CP$ şi $CP \perp (MAB) \Rightarrow ON \perp (MAB)$ (2p)

b) $NO \perp (MAB), AO \subset (MAB) \Rightarrow NO \perp AO$ (3p)

$AO \perp MB$ (mediană în triunghi isoscel), $AO \perp ON$, $MB, NO \subset (MBN)$, $MB \cap NO = \{O\} \Rightarrow AO \perp (MBN)$, deci $d(A, (MBN)) = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (4p)

c) $MB \perp ON$, $MB \perp AO$, $ON, AO \subset (AON)$, $ON \cap AO = \{O\} \Rightarrow MB \perp (AON)$ (5p)

şi cum $AN \subset (AON)$, obţinem $MB \perp AN$ deci $\sphericalangle(MB, AN) = 90°$ (3p)

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ şi punctele M şi N situate pe muchiile SB şi SC astfel încât suma $x = AM + MN + ND$ este minimă.

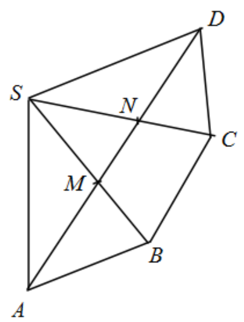
a) Demonstraţi că $MN \parallel (ABC)$.

b) Dacă valoarea minimă a lui x este $6\sqrt{3}$ şi muchia laterală a piramidei este de lungime 6, calculaţi măsura unghiului ASB.

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2022

Soluție:



a) Realizăm desfășurarea fețelor laterale SAB, SBC şi SCD.

Suma *x* este minimă dacă punctele A, M, N şi D sunt coliniare (4p)

$\Delta SAM \equiv \Delta SDN (ULU) \Rightarrow SM \equiv SN$ (4p)

$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}, \Delta SBC \Rightarrow MN \parallel BC$ (4p)

$BC \subset (ABC), MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (ABC)$ (3p)

b) Fie $SE \perp AD, E \in AD$, ΔSAD isoscel, SE este şi mediană, $AD = 6\sqrt{3}$ deci $AE = 3\sqrt{3}$ (3p)

ΔSAE dreptunghic: $AE = 3\sqrt{3}$ şi $AS = 6$ deci $cos(\sphericalangle SAE) = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle SAE = 30°$ (4p)

$\Rightarrow \sphericalangle ASD = 120° \Rightarrow \sphericalangle ASB = 120°: 3 = 40°$ (3p)