MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2022

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a IX-a

Subiectul 1

Fie $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine a_{2022}.

Soluție:

Fie $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$. Atunci $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_1 = 5$ și $a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}$.

Din relația din ipoteză obținem:

$$\frac{b_{n+1}^2 - 1}{24} = \frac{1}{16}\left(1 + 4\frac{b_n^2 - 1}{24} + b_n\right) \Rightarrow b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2 + 6b_n + 9}{4} \Rightarrow b_{n+1}^2 = \frac{(b_n + 3)^2}{4} \Rightarrow$$

$\mathrm{b}_{n+1} = \frac{\mathrm{b}_n + 3}{2} \Rightarrow \mathrm{b}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{b}_n + \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{b}_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(\mathrm{b}_n - 3) \Rightarrow$ 10p

$(\mathrm{b}_{n+1} - 3)$ este progresie geometrică cu rația $q = \frac{1}{2}$.

Obținem $b_n - 3 = (b_1 - 3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, de unde $b_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 3$.

Cum $a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24} \Rightarrow a_n = \frac{1}{24} \cdot \left[\left(\frac{1}{2^{n-2}} + 3\right)^2 - 1\right] \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n-4}} + \frac{3}{2^{n-3}} + 8\right)$. 10p

Înlocuind n cu 2022 se obține $a_{2022} = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{1}{2^{4040}} + \frac{3}{2^{2019}} + 8\right)$. 5p

Subiectul 2

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, Demonstrați că pentru $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$ are loc dubla inegalitate

$$n + 1 \leq (2 - x_1)(2 - x_2)........(2 - x_n) + x_1 + x_2 + ... + x_n \leq 2^n$$.

Precizați când are loc egalitatea.

Rezolvare

$f(x_i) = (2 - x_1)(2 - x_2).....(2 - x_n) + x_1 + x_2 + ...x_n$ este funcție de gradul I în fiecare din variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$

Expresia își atinge valorile extreme pentru $x_1, x_2, ..., x_n \in \{0,1\}$ 5p

Presupunem că p dintre variabile au valoarea 1 și n-p au valoarea 0, trebuie demonstrat că pentru $0 \leq p \leq n$, $n + 1 \leq 2^{n-p} + p \leq 2^n$

$n + 1 \leq 2^{n-p} + p \Leftrightarrow n - p + 1 \leq 2^{n-p}$ notăm $n - p$ cu m

$m+1 \le 2^m \forall m \in N$ (se demonstrează prin inducție)

$2^{n-p} + p \le 2^n$ 15p

egalitatea din stânga se atinge pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ iar cea din dreapta pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

.... 5p

Subiectul 3

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$.

a) Să se arate că pentru orice punct M din planul patrulaterului, există un punct P astfel încât $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$.

b) Să se arate că toate dreptele MP, unde M și P verifică egalitatea precedentă, au un punct comun H.

c) Fie E simetricul lui B față de A. Să se arate că punctele C, H și centrul de greutate al triunghiului BCD sunt coliniare dacă $AC \,||DE$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = 3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 6\overrightarrow{OP} \Rightarrow$

$\Longrightarrow 5\overrightarrow{OP} = 3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\left(3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}\right)$, deci există un punct P din plan cu proprietatea cerută. 5p

b) Din a)$\Rightarrow 5\overrightarrow{OP} = 3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow$

$5\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM} = 3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\ |:6 \Rightarrow$

$\frac{5}{6}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{6}\left(3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ (1) care este un vector care nu depinde de M și P. Notând H astfel încât $\overrightarrow{OH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OM}$ (2), obținem că H este coliniar cu M și P și nu depinde de M și P, de unde rezultă că toate dreptele MP trec prin acest H, pentru orice M și P care satisfac relațiile de la punctul a). 10p

c) Fie E simetricul lui B față de A.

Atunci $2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$. (3)

Din b), știm că $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{6}\left(3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$.

Scriind pentru $O = C$, obținem: $\overrightarrow{CH} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CG}}{2}$. (4)

Dacă $AC\,||DE \Rightarrow \overrightarrow{CA}$ coliniar cu $\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{CA} = \alpha\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \alpha\left(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD}\right) \overset{(3)}{=} \alpha\left(2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right)$. (5)

G este centrul de greutate al triunghiului BCD, de unde rezultă:

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG} \overset{(5)}{\Rightarrow} \overrightarrow{CA} = 2\alpha\overrightarrow{CA} - 3\alpha\overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{3\alpha}{2\alpha-1}\overrightarrow{CG} \overset{(4)}{\Rightarrow}$
$2\overrightarrow{CH} = \frac{3\alpha}{2\alpha-1}\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG} \Rightarrow 2\overrightarrow{CH} = \frac{5\alpha-1}{2\alpha-1}\overrightarrow{CG} \Rightarrow C, G, H$ coliniare. 10p

Subiectul 4

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic și $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:

$$(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n})\left(\frac{1}{a^{2n}} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{c^{2n}}\right) \geq \frac{4^n + 5\cdot 2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} \geq 9.$$

Soluție:

Fie $a^2 = b^2 + c^2$. Atunci $(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n})\left(\frac{1}{a^{2n}} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{c^{2n}}\right) =$

$((b^2 + c^2)^n + b^{2n} + c^{2n})\left(\frac{1}{(b^2+c^2)^n} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{c^{2n}}\right) =$

$= 3 + \frac{(b^2+c^2)^n(b^{2n}+c^{2n})}{(bc)^{2n}} + \frac{b^{2n}+c^{2n}}{(b^2+c^2)^n} + \left(\frac{b}{c}\right)^{2n} + \left(\frac{c}{b}\right)^{2n} \geq$ 10p

$\geq 3 + \frac{2^n(bc)^n 2(bc)^n}{(bc)^{2n}} + \frac{(b^2+c^2)^n}{2^{n-1}(b^2+c^2)^n} + 2$ 10p

$= 5 + 2^{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}} \geq 9.$ .... 5p.