CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2023

Barem de corectare și notare

proba de matematică

clasa a VII-a

SUBIECTUL I

Se consideră numerele $a = \sqrt{65+4\sqrt{61}}+\sqrt{70+6\sqrt{61}}$ și $b = \sqrt{65-4\sqrt{61}}+\sqrt{70-6\sqrt{61}}$.

a) Arătați că $65+4\sqrt{61}=\left(\sqrt{61}+2\right)^2$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $[a-b]=[a]-[b]$.

c) Comparați numerele $\{a\}$ și $\{b\}$.

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a lui x și cu $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Soluție:

a) $65+4\sqrt{61}=\left(\sqrt{61}+2\right)^2$ (1p)

b) $\sqrt{65+4\sqrt{61}}=\sqrt{61+2\cdot\sqrt{61}\cdot 2+4}=\sqrt{(\sqrt{61}+2)^2}=\sqrt{61}+2$

$\sqrt{70+6\sqrt{61}}=\sqrt{61+2\cdot\sqrt{61}\cdot 3+9}=\sqrt{(\sqrt{61}+3)^2}=\sqrt{61}+3$ (1p)

Analog,

$\sqrt{65-4\sqrt{61}}=\sqrt{61-2\cdot\sqrt{61}\cdot 2+4}=\sqrt{(\sqrt{61}-2)^2}=\sqrt{61}-2$ (1p)

$\sqrt{70-6\sqrt{61}}=\sqrt{61-2\cdot\sqrt{61}\cdot 3+9}=\sqrt{(\sqrt{61}-3)^2}=\sqrt{61}-3$

Deci, $a=\sqrt{61}+2+\sqrt{61}+3=2\sqrt{61}+5$

$b=\sqrt{61}-2+\sqrt{61}-3=2\sqrt{61}-5$ (1p)

$[a-b]=10$, $[a]=20$ și $[b]=10 \Longrightarrow [a-b]=[a]-[b]$ (1p)

c) $\{a\}=a-[a]=2\sqrt{61}+5-20=2\sqrt{61}-15$ (1p)

$\{b\}=b-[b]=2\sqrt{61}-5-10=2\sqrt{61}-15 \Longrightarrow \{a\}=\{b\}$ (1p)

SUBIECTUL II

Arătați că ecuația $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1011}}+\frac{1}{\sqrt{2022-x}+\sqrt{1011}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2022-x}}$ are 2023 de soluții numere întregi.

Soluție: Condiția de existență a radicalilor: $0\le x\le 2022$ (1p)

Se observă că $x=1011$ este soluție a ecuației (1p)

Pentru $x\ne 1011$, ecuația devine: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1011}}{x-1011}+\frac{\sqrt{2022-x}-\sqrt{1011}}{2022-x-1011}=\frac{2\left(\sqrt{2022-x}-\sqrt{1011}\right)}{2x-2022}$ (3p)

Ultima relație este adevărată pentru orice x, $0\le x\le 2022$ (1p)

Cum $x=1011$ este soluție, deducem că există 2023 soluții numere întregi (1p)

SUBIECTUL III

Fie pătratul $ABCD$, în care E și F sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC.

Notăm $CE \cap DF = \{M\}$ și $AM \cap BC = \{N\}$. Arătați că:

a) $CE \perp DF$;

b) $AD \equiv AM$;

c) N este mijlocul segmentului CF.

Soluție:

a) $\triangle BCE \equiv \triangle DCF\ (C.C) \Rightarrow \sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CDF$

$\sphericalangle BCE + \sphericalangle DCE = \sphericalangle BCD$ sau $\sphericalangle CDM + \sphericalangle DCM = 90^0$

$\Rightarrow \sphericalangle CMD = 90^0$, deci $CE \perp DF$ (1p)

b) Fie P simetricul punctului E față de A.

Avem $\triangle DAP \equiv \triangle CBE\ (C.C)$, deci $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle CDF$

$\sphericalangle CDF + \sphericalangle FDA = \sphericalangle ADP + \sphericalangle FDA \Rightarrow \sphericalangle FDP = 90^0 \Rightarrow PD \perp DF$

Rezultă $ME \parallel DP$ si atunci $DMEP$ este un trapez dreptunghic. (1p)

Fie Q – mijlocul lui DM, AQ-este linie mijlocie in trapez

Dar $AQ \parallel EM$ și $EM \perp DM \Rightarrow AQ \perp DM$ (1p)

AQ –este mediană și înălțime în $\triangle ADM$, deci $AD \equiv AM$ (1p)

c) Din $AD \equiv AM$, rezultă $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle AMD$

$\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle CFD$ ($alt.int$) și $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle NMF$ ($op.vf$)

Rezultă $\sphericalangle CFM \equiv \sphericalangle NMF$, de unde $MN \equiv NF$ **(1)** (1p)

$\sphericalangle NMC + \sphericalangle NMF = 90^0$, $\sphericalangle MCF + \sphericalangle MFC = 90^0$ și $\sphericalangle NMF \equiv \sphericalangle MFN \Rightarrow$

$\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle MCN \Rightarrow$, deci $MN \equiv CN$ **(2)** (1p)

Din (1) si (2) obținem $CN \equiv NF$ și cum $N \in CF$, $\Rightarrow N$ este mijlocul segmentului CF (1p)

SUBIECTUL IV

Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $2AB = 3CD$.

Paralelele la AD prin C și prin mijlocul P al laturii CD intersectează latura AB în N, respectiv M.

Fie $\{G\} = MC \cap PN$, $\{K\} = DN \cap PM$, $\{E\} = AP \cap BC$ și $\{F\} = BP \cap AD$.

Arătați că:

a) Dreptele EG și FK se intersectează pe latura AB;

b) Dreptele EF și AB sunt paralele și $AB = 2EF$.

Soluție:

a) Din 2AB = 3CD $\Longrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{CD}{2}$ = a $\Longrightarrow$ AB = 3a, CD = 2a $\Longrightarrow$ AM = MN = NB................(1p)

DCNA paralelogram $\Longrightarrow$ K mijlocul lui DN $\Longrightarrow$

KM linie mijlocie în Δ NAD $\Longrightarrow$ KM = $\frac{AD}{2}$ ....(1p)

Δ FDP ~ Δ FAB $\Longrightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{DP}{AB} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{DA}{FA} = \frac{2}{3}$..(1p)

Fie {R} = FK ∩ AB

Δ RKM ~ Δ RFA $\Longrightarrow \frac{RM}{RA} = \frac{KM}{AF} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{3AD}{2}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow$ RA = 3RM $\Longrightarrow$ R este mijlocul lui MN.

Analog, se arată că {S} = EG ∩ AB este mijlocul lui MN.

Rezultă că R = S, deci FR și EG se intersectează pe AB. ....(2p)

b) Din Δ RKM ~ Δ RFA $\Longrightarrow \frac{RK}{RF} = \frac{RM}{RA} = \frac{1}{3}$

Din Δ RGN ~ Δ FEB $\Longrightarrow \frac{RG}{RE} = \frac{RN}{RB} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{RK}{RN} = \frac{RG}{RE} \xRightarrow{RT\ Thales}$ KG ∥ FE ȘI FE = 3 KG(1p)

Dar KG = MR $\Longrightarrow$ KG = $\frac{MN}{2} = \frac{AB}{6} \Longrightarrow$ FE = $3\cdot \frac{AB}{6} = \frac{AB}{2} \Longrightarrow$ AB = 2EF............................(1p)