CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2023

Barem de corectare și notare
proba de matematică
Clasa a V-a

1. Fie numărul $a = 1^n + 3^n + 5^n$, n număr natural.
   a) Arătați că a se divide cu 5 pentru acea valoare a lui n care verifică egalitatea $2^{156} + 3 \cdot 4^{78} = 2^n$;
   b) Determinați toate valorile pe care le poate lua n astfel încât a să fie divizibil cu 5.

Barem de corectare și notare:

a) $2^{156} + 3 \cdot 4^{78} = 2^n \Rightarrow 2^{156} + 3 \cdot 2^{156} = 2^n$

$\Rightarrow 2^{156}(1+3) = 2^n \Rightarrow 2^{158} = 2^n \Rightarrow n = 158$ ……………………………………...1p

Pentru $n = 158$ obținem $a = 1^{158} + 3^{158} + 5^{158}$

$\Rightarrow U(a) = U(1^{158} + 3^{158} + 5^{158})$

$U(1^{158}) = 1$

$U(3^{158}) = 9$

$U(5^{158}) = 5$ …………………………………………………………………….....1p

$\Rightarrow U(a) = U(1+9+5) = 0 \Rightarrow a \vdots 5$…………………………………………….....1p

b) daca $n = 0 \Rightarrow a = 3$ și nu este divizibil cu 5……………………………..…..1p

daca $n \neq 0$, $U(a) = U(1^n + 3^n + 5^n)$

$U(1^n) = 1$, $U(5^n) = 5$

$$U(3^n) = \begin{cases} 3, & \text{daca } n = 4k+1, \ k \text{ numar natural} \\ 9, & \text{daca } n = 4k+2, \ k \text{ numar natural} \\ 7, & \text{daca } n = 4k+3, \ k \text{ numar natural} \\ 1, & \text{daca } n = 4k, \ k \text{ numar natural} \end{cases}$$ ……………………………….2p

$$\Rightarrow\ U(a) = \begin{cases} 9, & \text{daca } n = 4k+1, \quad k \text{ numar natural} \\ 5, & \text{daca } n = 4k+2, \quad k \text{ numar natural} \\ 3, & \text{daca } n = 4k+3, \quad k \text{ numar natural} \\ 7, & \text{daca } n = 4k, \quad k \text{ numar natural} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ a \vdots 5$ pentru numerele de forma $n = 4k+2,\ k$ numar natural. ……………………..…..1p

2. Fie *a*, *b*, *c* și *d* patru numere naturale nenule. Știind că împărțind pe *a* la *b*, pe *b* la *c* și pe *c* la *d*, se obține de fiecare dată câtul și restul egale cu 2.
   a) Arătați că $a \geq 38$;
   b) Dacă $S = a+b+c+d$, află restul împărțirii numărului $(S+4)$ la 5.

Barem de corectare și notare:

a) a=2b+2, 2< b; b=2c+2, 2 <c ; c=2d+2, 2< d ……………………………………….1p

2< $d \Rightarrow 2d > 4 \Rightarrow c > 6$ și pentru că c=2d+2⇒c este par ⇒ $c \geq 8$

$\Rightarrow b \geq 18 \Rightarrow 2b \geq 36 \Rightarrow a \geq 38$ …………………………………………………….2p

b) c=2d+2⇒ $b = 4d+6 \Rightarrow a = 8d+14$ ……………………………………..…..1p

$\Rightarrow S+4 = 15d+25+1 \Rightarrow$ ………………………………………………………..1p

$S = 5(3d+5)+1 \Rightarrow$ ……………………………………………………………..…..1p

restul împărțirii numărului (S+4) la 5 este 1. …………………………………………..1p

3. Determinați numărul natural a astfel încât $2022^{2022^{2023}}$ să se poată scrie a^a, cu a număr natural nenul.

Barem de corectare și notare:

Folosind regulile de calcul cu puteri, putem scrie:

$2022^{2022^{2023}} = 2022^{2022^{x+y}} = 2022^{2022^x \cdot 2022^y} = \left(2022^{2022^x}\right)^{2022^y} = a^a$ …………..2p

În consecință, vom căuta numărul a de forma:

$a = 2022^{2022^x} = 2022^y,$ ………………………………………………………..1p

Unde, $\begin{cases} x+y=2023 \\ 2022^x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2022 \end{cases}$ ……………………………………………………….2p

În consecință,

$2022^{2022^{2023}} = \left(2022^{2022^1}\right)^{2022^{2022}} = \left(2022^{2022}\right)^{2022^{2022}} \Rightarrow a = 2022^{2022}$.………………..2p

4. Avem scrise în ordine primele *2005* numere naturale nenule. Eliminăm din acest șir o parte din numere după următorul procedeu: tăiem un număr, sărim un număr; tăiem două numere, sărim două numere; tăiem trei numere, sărim trei numere și așa mai departe.
   a) Verificați dacă *2005* este tăiat sau nu;
   b) Câte numere au rămas netăiate?

Barem de corectare și notare:

Pasul 1: tăiem un număr, sărim un număr;

Pasul 2: tăiem două numere, sărim două numere;

Pasul 3: tăiem trei numere, sărim trei numere;

...

Pasul n: tăiem n numere, sărim n numere

După n pași avem 1+2+3+...+ n numere tăiate și 1+2+3+...+ n numere netăiate ………………..1p

$\Rightarrow n(n+1):2$ numere tăiate și $\Rightarrow n(n+1):2$ numere netăiate ………………………………..1p

$\Rightarrow n(n+1)$ numere tăiate și netăiate. ………………………………………………………..…..1p

Căutăm acel număr n pentru care $n(n+1) < 2005$ și nu se mai poate aplica pasul următor

Deci căutăm cel mai apropiat produs de două numere consecutive mai mic decât 2005

$\Rightarrow n = 44 \Rightarrow 44 \cdot 45 = 1980$

$\Rightarrow$ până la 1980 avem 990 numere tăiate și 990 numere netăiate

$\Rightarrow$ au rămas 25 de numere ce vor fi tăiate ……………………………………………….…..2p

$\Rightarrow$ 2005 este tăiat ………………………………………………………………………...1p

$\Rightarrow$ în șir sunt 990 +25 = 1015 numere tăiate și 990 numere netăiate. …………………………....1p