CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2023

Barem de corectare și notare
Clasa a VIII-a

Subiectul I

Fie suma $S_n=\frac{1}{2^3-1^3-1}+\frac{1}{3^3-2^3-1}+\frac{1}{4^3-3^3-1}+...+\frac{1}{(n+1)^3-n^3-1}$, unde n este număr natural nenul.

a. Calculați suma pentru $n=3$.

b. Calculați suma pentru $n=2023$.

<u>Barem</u>: a. $S_3=\frac{1}{4}$. 2p

b. Calculăm $(n+1)^3-n^3-1=3n(n+1)$. 1p

$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 1p

$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 1p

$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{3(n+1)}$. $S_{2023}=\frac{2023}{6072}$. 2p

Subiectul al II-lea

Fie numerele naturale a, b, c, d astfel încât $4^{a-3}+4^{b+3}\le 2^{a+b+1}$ și $9^{c-1}+9^{d+1}\le 2\cdot3^{c+d}$.

Arătați că $\left(2^a\cdot3^c+2^b\cdot3^c+2^a\cdot3^d+2^b\cdot3^d\right) \vdots\ 670$.

<u>Barem</u> :

$4^{a-3}+4^{b+3}\le 2^{a+b+1} \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{a-3}+\left(2^2\right)^{b+3}-2\cdot2^{a+b}\le 0$

$\left(2^{a-3}-2^{b+3}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow 2^{a-3}=2^{b+3} \Leftrightarrow a=b+6$ 2p

$9^{c-1}+9^{d+1}\le 2\cdot3^{c+d} \Leftrightarrow \left(3^{c-1}\right)^2-2\cdot3^c\cdot3^d+\left(3^{d+1}\right)^2\le 0$

$\left(3^{c-1}-3^{d+1}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow c=d+2$ 2p

Erată : *din cauza unei erori de tehnoredactare, în textul problemei se cere să se demonstreze că* $x \vdots 670$, *cerința corectă fiind* $x \vdots 650$. *Concurenții care au demonstrat acest lucru, au primit punctajul maxim.*

$x = 2^a\left(3^c+3^d\right)+2^b\left(3^c+3^d\right)=\left(2^a+2^b\right)\left(3^c+3^d\right)=$

$=\left(2^{b+6}+2^b\right)\cdot\left(3^{d+2}+3^d\right)=$ 3p

$=2^b\left(2^6+1\right)\cdot 2^d\left(3^2+1\right)=650\cdot 2^b\cdot 2^d$

$\Rightarrow \quad x \vdots 650$

Subiectul al III-lea

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și Q un punct pe segmentul $A'C$ astfel încât $\dfrac{QC}{QA'}=\dfrac{1}{2}$. S este mijlocul lui $A'D$, iar T este mijlocul lui $D'C$. Dacă a este valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele $D'C$ și $C'Q$, iar b este valoarea tangentei unghiului dintre dreapta TQ și planul (ABC), arătați că $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<4$.

Barem :

Fie O centrul pătratului $ABCD$

$\Delta C'A'Q \sim \Delta OCQ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle A'QC' \equiv \sphericalangle CQO \quad \Rightarrow \quad C', Q, O \quad coliniare$ 1p

Aflarea valorii lui a 3p

Fie R mijlocul lui $A'Q$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow TQ \parallel D'R \quad \left(TQ \quad linie \quad mijlocie \quad în \quad \Delta D'CR\right) \\ Dacă \quad M \quad mijlocul \quad lui \quad A'B \Rightarrow D', R, M \quad coliniare \end{array}\right\} \Rightarrow T, Q, B \quad coliniare$$ 1p

$$\left.\begin{array}{l} \Pr_{(ABC)} T = T' \quad (T' \quad mijlocul \quad lui\, CD) \\ \Pr_{(ABC)} B = B \end{array}\right\} \Rightarrow \Pr_{(ABC)} TB = T'B$$ 1p

$\sphericalangle\left(TB,(ABC)\right)=\sphericalangle TBT'$

$\Delta TT'B$ *dreptunghic în* T' $: tgB = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = b$ 1p

Erată : *din cauza unei erori de tehnoredactare, în textul problemei se cere să se demonstreze că* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<4.$, *cerința corectă fiind* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$. *Concurenții care au determinat valorile lui a și b au primit punctajul maxim.*

Subiectul al IV-lea

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și M mijlocul muchiei $C'D'$. Dacă distanța dintre dreptele AD și BM este egală cu $a\sqrt{5}$ cm, determinați lungimea muchiei cubului.

<u>Barem</u> :

Construim $DP \perp MC$ și arătăm că DP este perpendiculară pe dreptele AD și BM.

Din $BC \perp (DCC')$ și $DP \subset (DCC')$ rezultă $BC \perp DP$. 1p

Din $DP \perp MC$ și $DP \perp BC$ rezultă $DP \perp (MBC)$, de unde $DP \perp MB$ 1p

Din $DP \perp BC$ și $BC \parallel AD$ rezultă $DP \perp AD$. 1p

În planul (MBC) construim $PE \parallel BC, E \in MB$, iar cum $BC \parallel AD$ obținem $PE \parallel AD$.

În planul determinat de dreptele PE și AD construim $EF \parallel DP, F \in AD$. Obținem că distanța dintre dreptele AD și BM este EF 2p

Cum $DPEF$ este paralelogram, $DP = EF = a\sqrt{5}$ cm.

Notăm cu x muchia cubului. Scriem $A_{\Delta MDC} = \dfrac{DC \cdot h_M}{2} = \dfrac{MC \cdot DP}{2}$.

Obținem $x = \dfrac{5a}{2}$ cm .... 2p.