CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 3$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z}} \leq \sqrt{3}.$$

(Marian Ursărescu)

Soluție: Din inegalitatea lui Cauchy, avem:

$$(x+y^2+z^2)(x+1+1) \geq (x+y+1)^2$$

$$(x+y^2+z^2)(x+2) \geq 9 \Rightarrow x+y^2+z^2 \geq \frac{9}{x+2} \text{ ..... 5 p}$$

$$\sqrt{x+y^2+z^2} \geq \frac{3}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2}} \leq \frac{\sqrt{x+2}}{3} \Rightarrow$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2}} \leq \frac{1}{3}\sum_{cyc} \sqrt{x+2} \text{ ; (1) ..... 5p}$$

Din inegalitatea lui Cauchy, avem:

$$3(x+2+y+2+z+2) \geq \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc} \sqrt{x+2} \leq \sqrt{3(x+y+z+6)} \Rightarrow \sum_{cyc} \sqrt{x+2} \leq 3\sqrt{3} \text{ ; (2) ..... 10p}$$

Din (1) și (2), avem:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2}} \leq \sqrt{3}. \text{ .....5p}$$

2. Determinați funcțiile $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\frac{xf(y)+f^2(x)}{f(x+y)} + \frac{xf(y)}{f(x)} = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

$$x = y = 1 \Rightarrow \frac{f(1)+f^2(1)}{f(2)} + 1 = 2f(1) \Leftrightarrow f(2) = \frac{f(1)+f^2(1)}{2f(1)-1} \text{ ..... 5p}$$

Din condiția $f(2) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(1) \in \{1; 2\}$ ……

Dacă $f(1) = 2$, obținem $f(2) = 2$. Luând $y = 1$ în relația din ipoteză, obținem:

$$\frac{2x + f^2(x)}{f(x+1)} + \frac{2x}{f(x)} = f(x) + 2.$$

Pentru $x = 2 \Rightarrow f(3) = 4$, iar pentru $x = 3 \Rightarrow f(4) = \frac{44}{9}$, absurd ……. 5p

Deci $f(1) = 1$ și rezultă $f(2) = 2$.

Folosind metoda inducției matematice, obținem: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. …… 10p

3. Tangentele în A și B la cercul circumscris triunghiului ABC isoscel ($AC > AB = BC$) se intersectează în P, iar mediatoarea lui $[BC]$ taie BC în M și AC în N.
Demonstrați că $|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN}| = 3\,MN$.

Soluție:
Notăm: $AB = c, AC = b, BC = a$. $BA = BC \Leftrightarrow c = a$.

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP} \text{ (1) ……. 5p}$$

$$\widehat{ABP} \equiv \widehat{BAP} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BAC} \text{ (subîntind arcul mic } BA\text{) …… 5p}$$

Obținem: $\Delta BPA \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{BP}{CB} = \frac{BA}{CA} \Leftrightarrow \frac{BP}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow BP = \frac{ac}{b} \Leftrightarrow BP = \frac{a^2}{b}$

$$\widehat{ABP} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BAC}\text{ , } BA \text{ secantă} \Rightarrow BP || CA \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{BP}{CA} \cdot \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{ac}{b^2} \cdot \overrightarrow{CA} \text{ (2)}$$

Din (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{ac}{b^2}\overrightarrow{CA}$ (3) ……. 5p

Fie E mijlocul lui $[AC]$. Rezultă că $\Delta BEC \sim \Delta NMC$ (triunghiuri dreptunghice, $\hat{C}$ unghi comun), de unde obținem:

$$\frac{EC}{MC} = \frac{BC}{CN} \Leftrightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{a}{CN} \Leftrightarrow CN = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA}.$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} \text{ (4)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{a^2}{b^2}\overrightarrow{CA} \text{ (5)}$$

Din (3), (4), (5) obținem: $\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3a^2}{b^2}\overrightarrow{CA}$, de unde $\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{MN}$, deci $|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN}| = 3\,MN$. 5p

4. Fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numere reale.
   Să se arate că aceste numere sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă printre toate diferențele $a_j - a_i$, $1 \le i < j \le n$, exact $n-1$ sunt diferite.

Soluție:

Dacă $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este o progresie aritmetică și $r > 0$ este rația sa, atunci:

$$a_j - a_i = (j-i)r \in \{r, 2r, \dots, (n-1)r\} \text{ pentru } 1 \le i < j \le n. \text{ ……. 5p}$$

Reciproc: Fie $x_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 1,2,\dots,n-1$).

Avem:

1) Diferențele $a_j - a_i$ pentru $i = 1$ și $j = 2,3,\dots,n$
   $\Longrightarrow \underbrace{x_1 < x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3 < \cdots < x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n-1 \text{ numere distincte}}$ (1) 10p

2) Diferențele $a_j - a_i$ pentru $i = 2$ și $j = 3,4,\dots,n$
   $\Longrightarrow \underbrace{x_2 < x_2 + x_3 < \cdots < x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}_{n-2 \text{ numere distincte}}$ (2) 5p

   Cum numerele din (2) sunt și în (1) și $x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$, deducem că:
   $x_1 = x_2, x_2 + x_3 = x_1 + x_2, \dots, x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}$,
   de unde se obțin relațiile:
   $x_1 = x_2, x_1 = x_3, \dots, x_1 = x_{n-1}$, care ne arată că $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este o progresie aritmetică.
   ..... 5p