CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
proba de matematică – individual
clasa a X-a

Subiectul 1 (25 de puncte)

(10p) a) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația :

$$9^{\sqrt{x}}+9^{\sqrt{y}}+9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}=\frac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}.$$

* * *

(15p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2022^{(\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}-2022^{(\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}=2023\cdot\cos 2x.$$

Sergiu Nistor, Piatra Neamț

Soluție:

a) Avem $x,y>0$ și din inegalitatea mediilor obținem:

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 3$, de unde rezultă $\frac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}\leq 27$ (1)

..... **4 puncte**

Pe de altă parte $9^{\sqrt{x}}+9^{\sqrt{y}}+9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}\geq 3\sqrt[3]{9^{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}}\geq 3\sqrt[3]{9^3}=27$ (2)

..... **4 puncte**

Deducem că trebuie să avem egalitate în (1) și (2) și obținem soluția $S=\{(1,1)\}$

..... **2 puncte**

b) Ecuația se scrie echivalent :

$$2022^{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}-2022^{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}=2023\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2022^{1-\cos^4 x}-2022^{1-\sin^4 x}=2023\cdot(\cos^4 x-\sin^4 x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2022^{1-\cos^4 x}+2023(1-\cos^4 x)=2022^{1-\sin^4 x}+2023\cdot(1-\sin^4 x)$$

..... **5 puncte**

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=2022^t+2023t$ este strict crescătoare, deci injectivă. Ecuația se scrie $f(1-\cos^4 x)=f(1-\sin^4 x)$ și din injectivitate deducem $1-\cos^4 x=1-\sin^4 x$

..... **5 puncte**

Obținem $\cos 2x=0$, cu mulțimea soluțiilor $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

..... **5 puncte**

Subiectul 2 (25 de puncte)

Pentru fiecare număr complex nenul z considerăm mulțimea $A_z = \left\{1 + z + z^2 + ... + z^n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Determinați numerele z pentru care A_z este mulțime finită.

b) Câte numere complexe z au proprietatea că A_z are 2023 elemente?

Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție:

a) Observăm că $A_1 = \mathbb{N}$, deci $z = 1$ nu convine.

…….. **3 puncte**

Dacă A_z este mulțime finită, atunci există $r, s \in \mathbb{N}$ cu $r + 1 < s$ astfel încât $1 + z + z^2 + ... + z^s = 1 + z + z^2 + ... + z^r$, de unde rezultă $1 + z + z^2 + ... + z^{s-r-1} = 0$. Înmulțind această egalitate cu $1 - z$ se obține $z^{s-r} = 1$, adică $z \in U_m$ $(m = s - r \geq 2)$. Am notat cu U_m mulțimea rădăcinilor de ordinul m ale unității.

…….. **5 puncte**

Dacă $z \in U_m$, atunci $1 + z + z^2 + ... + z^{m-1} = 0$ și, grupând termenii câte m, obținem $1 + z + z^2 + ... + z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^r$, unde r este restul împărțirii lui n la m. Prin urmare, $A_z \subset \left\{1, 1 + z, 1 + z + z^2, \ ... \ , 1 + z + ... + z^{m-1}\right\}$, deci A_z este mulțime finită.

…….. **5 puncte**

Numerele căutate sunt $z \in \bigcup_{m \geq 2} U_m \setminus \{1\}$.

…….. **2 puncte**

b) Dacă $|A_z| = 2023$, atunci A_z este mulțime finită, deci există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, astfel încât $z^m = 1$.

…….. **2 puncte**

Fie m_0 cel mai mic număr natural cu proprietatea de mai sus. Demonstrăm că $A_z = \left\{1, 1 + z, 1 + z + z^2, \ ... \ , 1 + z + ... + z^{m_0 - 1}\right\}$ și atunci $|A_z| = m_0$.

Într-adevăr, pentru $n > m_0$ avem $1 + z + z^2 + ... + z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^r$, unde r este restul împărțirii lui n la m_0, iar pentru $1 \leq r < s \leq m_0$ avem $1 + z + z^2 + ... + z^s \neq 1 + z + z^2 + ... + z^r$ (în caz contrar, obținem $z^{s-r} = 1$ ceea ce contrazice faptul că m_0 este minim).

…….. **5 puncte**

În concluzie, $|A_z| = 2023 \Leftrightarrow z^{2023} = 1$ și $z^k \neq 1$ pentru $k = \overline{1, 2022}$, adică z este rădăcină primitivă de ordinul 2023 a unității.

Numărul rădăcinilor primitive de ordinul 2023 ale unității este $\varphi(2023)$, unde φ este indicatorul lui Euler. Deoarece $2023 = 7 \cdot 17^2$, obținem $\varphi(2023) = 1632$.

…….. **3 puncte**

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2023

Subiectul 3 (25 de puncte)

Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ o funcție cu proprietatea că $f\left(x\cdot f(y)+f(x)\right)=y\cdot f(x)+x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Q}$. Arătați că $f(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$.

Sergiu Nistor, Piatra Neamț

Soluție:

Pentru $x=0$ în relația din enunț obținem $f\left(f(0)\right)=y\cdot f(0)$, $\forall y\in\mathbb{Q}$, iar de aici deducem că $f(0)=0$. Făcând $y=0$, rezultă $f\left(f(x)\right)=x$, $\forall x\in\mathbb{Q}$, iar de aici deducem că f este bijectivă.

…….. **5 puncte**

Pentru $x=1$ și $y=f(1)$ obținem $f\left(1+f(1)\right)=f^2(1)+1$, (1). Făcând apoi $x=y=1$, rezultă că $f\left(2f(1)\right)=f(1)+1$, iar de aici deducem că $f\left(f(1)+1\right)=f\left(f\left(2f(1)\right)\right)=2f(1)$. Înlocuind în relația (1), obținem $2f(1)=f^2(1)+1$, adică $\left(f(1)-1\right)^2=0$, deci $f(1)=1$.

…….. **4 puncte**

Făcînd $x=1$ în relația din enunț, obținem $f\left(f(y)+1\right)=y+1$, $\forall y\in\mathbb{Q}$. Aplicând aici f, deducem că $f(y+1)=f(y)+1$, $\forall y\in\mathbb{Q}$ (2).

…….. **4 puncte**

Folosind relația (2), se demonstrează imediat prin inducție că $f(n)=n$ și $f(-n)=-n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, adică avem $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$.

…….. **4 puncte**

Pentru $x\in\mathbb{Z}$ și $y\in\mathbb{Q}$ în relația din enunț obținem $f\left(x\cdot f(y)+x\right)=yx+x$. Aplicând aici f, deducem că $xf(y)+x=f(yx+x)$. Folosind din nou relația (2), obținem $x\cdot f(y+1)=f\left(x(y+1)\right)$, adică $a\cdot f(b)=f(a\cdot b)$, $\forall a\in\mathbb{Z}$ și $\forall b\in\mathbb{Q}$ (3).

…….. **4 puncte**

Pentru orice $m\in\mathbb{Z}$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $m=f(m)=f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)\overset{(3)}{=}n\cdot f\left(\frac{m}{n}\right)$, deci $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$, adică $f(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$.

…….. **4 puncte**

Subiectul 4 (25 de puncte)

Fie $z\in\mathbb{C}$, cu $|z|=1$. Demonstrați că există $a_1,a_2,a_3,a_4\in\{-1,1\}$ cu $a_1+a_2+a_3+a_4=2$, astfel încât:

$$a_1\cdot\left|z^2+(-1-i)z+i\right|+a_2\cdot\left|z^2+(1-i)z-i\right|+a_3\cdot\left|z^2+(1+i)z+i\right|+a_4\cdot\left|z^2+(-1+i)z-i\right|=0. \quad (*)$$

* * *

***Soluție*:**

$$\left|z^2+(-1-i)z+i\right|=\left|(z-1)(z-i)\right|=|z-1|\cdot|z-i|$$

$$\left|z^2+(1-i)z-i\right|=\left|(z+1)(z-i)\right|=|z+1|\cdot|z-i|$$

$$\left|z^2+(1+i)z+i\right|=\left|(z+1)(z+i)\right|=|z+1|\cdot|z+i|$$

$\left|z^2+(-1+i)z-i\right|=\left|(z-1)(z+i)\right|=\left|z-1\right|\cdot\left|z+i\right|$.

…… **7 puncte**

Fie punctele $A(1)$, $B(i)$, $C(-1)$, $D(-i)$ și $P(z)$, unde $|z|=1$. Atunci A, B, C, D sunt vârfurile unui pătrat, iar P se află pe cercul circumscris pătratului $ABCD$. Relația (*) devine:

$$a_1\cdot PA\cdot PB+a_2\cdot PB\cdot PC+a_3\cdot PC\cdot PD+a_4\cdot PD\cdot PA=0. \qquad (**)$$

…… **7 puncte**

Dacă $P\in AB_{mic}$, avem $\sphericalangle APB=135^\circ$, $\sphericalangle BPC=\sphericalangle CPD=\sphericalangle DPA=45^\circ$. Aplicând teorema cosinusului, obținem:

$$AB^2=PA^2+PB^2-2\cdot PA\cdot PB\cdot\cos 135^\circ \Leftrightarrow 2=PA^2+PB^2+PA\cdot PB\cdot\sqrt{2} \qquad (1)$$
$$BC^2=PB^2+PC^2-2\cdot PB\cdot PC\cdot\cos 45^\circ \Leftrightarrow 2=PB^2+PC^2-PB\cdot PC\cdot\sqrt{2} \qquad (2)$$
$$CD^2=PC^2+PD^2-2\cdot PC\cdot PD\cdot\cos 45^\circ \Leftrightarrow 2=PC^2+PD^2-PC\cdot PD\cdot\sqrt{2} \qquad (3)$$
$$AD^2=PA^2+PD^2-2\cdot PA\cdot PD\cdot\cos 45^\circ \Leftrightarrow 2=PA^2+PD^2-PA\cdot PD\cdot\sqrt{2} \qquad (4)$$

…… **6 puncte**

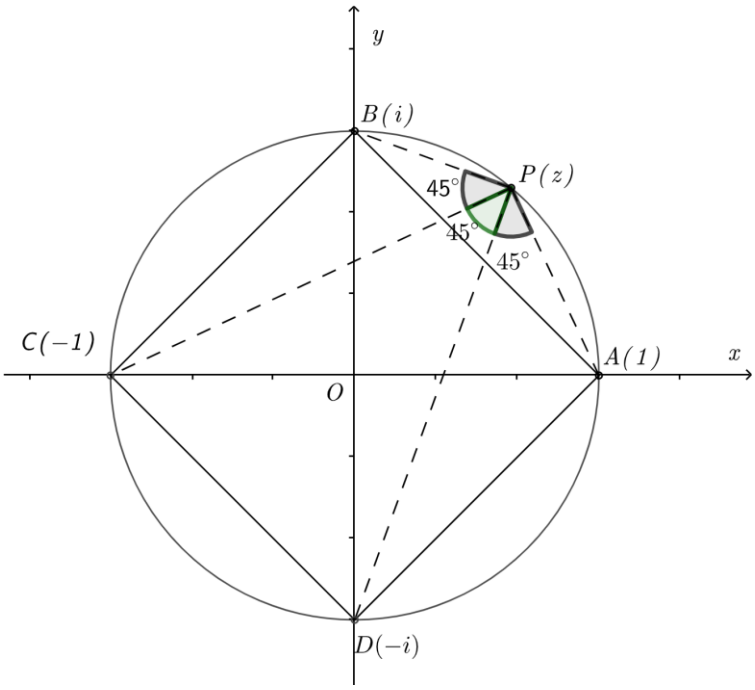
Adunăm relațiile (1) și (3), scădem relațiile (2) și (4), apoi împărțim prin $\sqrt{2}$ și obținem:

$$PA\cdot PB-PC\cdot PD+PB\cdot PC+PA\cdot PD=0.$$

Folosind relația (**), deducem că $a_1=a_2=a_4=1$ și $a_3=-1$, cu $a_1+a_2+a_3+a_4=2$.

Celelalte cazuri, $P\in BC_{mic}, P\in CD_{mic}, P\in AD_{mic}$ se tratează analog.

…… **3 puncte**

În situațiile particulare când $P\in\{A,B,C,D\}$, egalitatea (**) este evidentă, cu trei dintre valorile a_1,a_2,a_3,a_4 egale cu 1 și una -1.

…… **2 puncte**