CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

SUBIECTE
proba de matematică – individual
clasa a XI-a

Subiectul 1 (25 de puncte)

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{2k+1} = I_n$. Arătați că:

(10p) a) $\det(A + I_n) \geq 0$

(5p) b) $A + I_n \neq O_n$, pentru n impar

(10p) c) $\det(A^p + I_n) \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

Subiectul 2 (25 de puncte)

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel ca $(A + I_n)(B - I_n) = O_n$ și $(B + I_n)(A - I_n) = O_n$.
Demonstrați că funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \det((1 - z)A + zB)$ este constantă.

Subiectul 3 (25 de puncte)

Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} i^{\ln j} \right)^{\frac{1}{(n \ln n)^2}}$.

Subiectul 4 (25 de puncte)

Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x - y) + f(x + y) = 2 \cdot (f(x) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3,5 ore.