CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Proba de matematică – individual
clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{2k+1} = I_n$. Arătați că:

a) $\det(A+I_n) \geq 0$

b) $A+I_n \neq O_n$, pentru n impar

c) $\det(A^p+I_n) \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

* * *

Soluție:

a) $A^{2k+1} = I_n \Rightarrow \det A^{2k+1} = \det I_n \Rightarrow \det A = 1$

..... **5 puncte**

$\det(A+I_n) = \det(A+A^{2k+1}) = \det A \cdot \det(I_n + A^{2k}) = \det(I_n + A^{2k}) =$

$\det\left[(A^k + i\cdot I_n)(A^k - i\cdot I_n)\right] = \det(A^k + i\cdot I_n)\cdot\overline{\det(A^k + i\cdot I_n)} = \left|\det(A^k + i\cdot I_n)\right|^2 \geq 0$

..... **5 puncte**

b) presupunând că $A+I_n = O_n \Rightarrow A = -I_n \Rightarrow \det A = (-1)^n = -1$(fals)

..... **5 puncte**

c) $\det A = 1 \Rightarrow A$ inversabilă și deci are sens $A^p, \quad p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $p = 2m, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \det(A^p + I_n) = \det(A^{2m} + I_n) = \left|\det(A^m + i\cdot I_n)\right|^2 \geq 0$

..... **5 puncte**

Dacă $p = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}$, atunci $A^p = A^{2m+1} = A^{2m+1}\cdot I_n = A^{2m+1}\cdot A^{2k+1} = A^{2(m+k+1)}$ și

$\det(A^p + I_n) = \det(A^{2(m+k+1)} + I_n) = \left|\det(A^{m+k+1} + i\cdot I_n)\right|^2 \geq 0$.

..... **5 puncte**

Subiectul 2

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel ca $(A+I_n)(B-I_n) = O_n$ și $(B+I_n)(A-I_n) = O_n$.

Demonstrați că funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z) = \det((1-z)A + zB)$ este constantă.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Relațiile date pot fi scrise $AB = A - B + I_n, (1)$, respectiv $BA = B - A + I_n, (2)$.

..... **5 puncte**

Din (1) obținem $ABA = A^2 - BA + A$ și din (2) obținem $ABA = AB - A^2 + A$, deci $A^2 - BA = AB - A^2$ sau $2A^2 = AB + BA$. Adunând relațiile (1) și (2), se obține $AB + BA = 2I_n$, deci $A^2 = I_n$ și prin simetrie, $B^2 = I_n$.

..... **10 puncte**

Pentru $z \in \mathbb{C}$ arbitrar, observăm că $\left((1-z)A+zB\right)^2 = (1-z)^2 A^2 + z^2B^2 + z(1-z)(AB+BA) =$
$= (1-z)^2 I_n + z^2 I_n + z(1-z)2I_n = I_n$, deci $\left(f(z)\right)^2 = \det I_n = 1$.

..... **5 puncte**

Rezultă că $f(z) \in \{-1,1\}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Deoarece f este funcție polinomială în z, care nu are rădăcini în $\mathbb{C}$, deducem că este constantă.

..... **5 puncte**

Subiectul 3

Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{1\le i<j\le n} i^{\ln j}\right)^{\frac{1}{(n\ln n)^2}}$.

Soluție:

Notăm $x_n = \left(\prod\limits_{1\le i<j\le n} i^{\ln j}\right)^{\frac{1}{(n\ln n)^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\ln x_n = \dfrac{1}{(n\ln n)^2}\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\ln i)(\ln j)$.

..... **2 puncte**

Din identitatea $(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2 + 2\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\ln i)(\ln j)$ rezultă că

$\left(\dfrac{\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n}{n\ln n}\right)^2 = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2}{(n\ln n)^2} + \dfrac{2}{(n\ln n)^2}\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\ln i)(\ln j)$, iar de aici obținem

$$2\ln x_n = \left(\frac{\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n}{n\ln n}\right)^2 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2}{(n\ln n)^2} \qquad (1)$$

..... **8 puncte**

Aplicând teorema Stolz-Cesaro, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n}{n\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]+\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln(n+1)}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+1} = 1 \qquad (2)$$

..... **5 puncte**

și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2}{(n\ln n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{(n+1)^2\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2(n+1)}{n^2\left[\ln^2(n+1)-\ln^2 n\right]+(2n+1)\ln^2(n+1)} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n^2\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\left[\ln(n+1)+\ln n\right]+(2n+1)\ln^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln(n^2+n)+n(2+\frac{1}{n})\ln^2(n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln^2(n+1)}{n}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\ln(n^2+n)+(2+\dfrac{1}{n})\ln^2(n+1)}=\frac{0}{\infty}=0 \qquad (3)$$

..... **5 puncte**

Folosind relațiile (1), (2) și (3) obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\frac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{e}$.

..... **5 puncte**

Subiectul 4

Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x-y)+f(x+y)=2\cdot\big(f(x)+f(y)\big),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

* * *

Soluție:

Pentru $x=y=0\Rightarrow 2f(0)=4f(0)$, deci $f(0)=0$.

Pentru $x=0\Rightarrow f(-y)+f(y)=2f(y)\Leftrightarrow f(-y)=f(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este funcție pară

..... **5 puncte**

Arătăm prin inducție că $f(n\cdot x)=n^2\cdot f(x),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Pentru $n=1$ egalitatea este adevărată.

Presupunem că $f(kx)=k^2f(x)$ pentru $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

Avem $f(x\cdot n-x)+f(x\cdot n+x)=2\cdot\big(f(n\cdot x)+f(x)\big)$, deci

$$f((n+1)x)=2n^2f(x)+2f(x)-(n-1)^2f(x)=(n+1)^2f(x)$$

..... **5 puncte**

Fie $f(1)=a$. Atunci $f(n)=a\cdot n^2$ și $a=f(1)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=n^2\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=a\cdot\frac{1}{n^2}$

..... **5 puncte**

Fie $r\in\mathbb{Q},\quad r>0,\quad r=\frac{m}{n},\quad m,n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $f(r)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=m^2\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m^2}{n^2}\cdot a=r^2\cdot a$

și din continuitatea funcției f obținem $f(x)=a\cdot x^2,\quad \forall x\in(0,\infty)$.

Cum f este funcție pară, obținem $f(x)=a\cdot x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

..... **10 puncte**