CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

SUBIECTE
proba de matematică – individual
clasa a X-a

Subiectul 1 (25 de puncte)

(10p) a) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația :

$$9^{\sqrt{x}}+9^{\sqrt{y}}+9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}=\frac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}.$$

(15p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2022^{(\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}-2022^{(\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}=2023\cdot\cos 2x.$$

Subiectul 2 (25 de puncte)

Pentru fiecare număr complex nenul z considerăm mulțimea $A_z=\left\{1+z+z^2+...+z^n \ / \ n\in\mathbb{N}\right\}$.

(15p) a) Determinați numerele z pentru care A_z este mulțime finită.

(10p) b) Câte numere complexe z au proprietatea că A_z are 2023 elemente?

Subiectul 3 (25 de puncte)

Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ o funcție cu proprietatea că $f\left(x\cdot f\left(y\right)+f\left(x\right)\right)=y\cdot f\left(x\right)+x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Q}$.
Arătați că $f\left(x\right)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$.

Subiectul 4 (25 de puncte)

Fie $z\in\mathbb{C}$, cu $|z|=1$. Demonstrați că există $a_1,a_2,a_3,a_4\in\{-1,1\}$ cu $a_1+a_2+a_3+a_4=2$, astfel încât :

$$a_1\cdot\left|z^2+(-1-i)z+i\right|+a_2\cdot\left|z^2+(1-i)z-i\right|+a_3\cdot\left|z^2+(1+i)z+i\right|+a_4\cdot\left|z^2+(-1+i)z-i\right|=0.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3,5 ore.