CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
proba de matematică
clasa a XII-a

Problema 1.
Pentru $z_0 \in C$ fixat și pentru fiecare $k \in R^*$ fie funcțiile:

$f_k: C \to C, f_k(z) = kz + (1-k)z_0,$

$g_k: C \to C, g_k(z) = z_0 + \dfrac{k}{\bar{z} - \bar{z}_0}$, *dacă* $z \neq z_0$ *și* $g(z_0) = z_0$.

Să se arate că mulțimea $G = \{f_k \ / \ k \in R^*\} \cup \{g_k \ / \ k \in R^*\}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

Soluție.
Avem $(f_{k_1} \circ f_{k_2})(z) = k_1[k_2 z + (1-k_2)z_0] + (1-k_1)z_0 = k_1 k_2 z + (1 - k_1 k_2)z_0 = f_{k_1 k_2}(z)$, ... 3p

$$\left(g_{k1} \circ g_{k_2}\right)(z) = \begin{cases} z_0 + \dfrac{k_1}{\overline{g_{k_2}(z)} - \overline{z_0}}, g_{k_2}(z) \neq z_0 \\ z_0, g_{k_2}(z) = z_0 \end{cases} = \frac{k_1}{k_2} z + \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) z_0 = f_{\frac{k_1}{k_2}}(z), \text{ ..... 4p}$$

$$\left(f_{k_1} \circ g_{k_2}\right)(z) = k_1 g_{k_2}(z) + (1-k_1) z_0 = \begin{cases} z_0 + \dfrac{k_1 k_2}{\overline{z} - \overline{z_0}}, z \neq z_0 \\ z_0, z = z_0 \end{cases} = g_{k_1 k_2}(z), \text{ ..... 6p}$$

$$\left(g_{k_1} \circ f_{k_1}\right)(z) = \begin{cases} z_0 + \dfrac{k_2}{\overline{f_{k_1}(z)} - \overline{z_0}}, f_{k_1}(z) \neq z_0 \\ z_0, f_{k_1}(z) = z_0 \end{cases} = \begin{cases} z_0 + \dfrac{k_2 k_1^{-1}}{\overline{z} - \overline{z_0}}, z \neq z_0 \\ z_0, z = z_0 \end{cases} = g_{\frac{k_2}{k_1}}(z). \text{ ..... 6p}$$

Deci compunerea funcțiilor "$\circ$" este lege de compoziție pe G. Mai rezultă: $f_k \circ f_{\frac{1}{k}} = f_{\frac{1}{k}} \circ f_k = 1_{\mathbb{C}}$ și $g_k \circ g_k = 1_{\mathbb{C}}$.

Deci funcțiile din G sunt inversabile și au inversele tot în G. Deducem că G este un subgrup al grupului funcțiilor bijective ale mulțimii $\mathbb{C}$. 6p

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2$ și $(G, \cdot)$ un grup de ordin n. Arătați că n este număr prim dacă și numai dacă funcțiile $f_k : G \to G, f_k(x) = x^k$, pentru $k = 1, 2, ..., n-1$, sunt automorfisme ale grupului $(G, \cdot)$.

Soluție: Fie e elementul neutru al grupului.
"$\Rightarrow$": Presupunem că n este număr prim. Din teorema lui Cauchy există un element de ordin n. Fie acesta $a \in G \Rightarrow G = \langle a \rangle$ și G este grup comutativ 5p

$f_k(xy) = (xy)^k = x^k \cdot y^k = f_k(x) \cdot f_k(y), \forall x, y \in G$, deci funcțiile f_k sunt morfisme 5p

Dacă $f_k(x) = f_k(y) \Rightarrow x^k = y^k \Rightarrow \left(xy^{-1}\right)^k = e$. Deoarece $ord(G) = n$ și $k < n$, rezultă $k = 1 \Rightarrow x = y$, adică f_k este funcție injectivă. Mulțimea G este finită, deci f_k este bijecție, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ 5p

"$\Leftarrow$": Reciproc, presupunem că funcțiile f_k sunt morfisme și presupunem, prin reducere la absurd, că n nu este număr prim. În acest caz există $p \in \mathbb{N}^*, p / n, p \in \{2, 3, ..., n-1\}$ un număr prim. Dacă $a \in G$ este un element de ordin

p, rezultă $f_p(a)=a^p=e=f_p(e)$ și $a\neq e$, contradicție cu injectivitatea funcției. Deci presupunerea făcută este falsă, adică n este număr prim.....10p

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $(f(x))^5+(f(x))^3+pf(x)=x, \forall\, x\in\mathbb{R}, p>0$. Să se calculeze:

$$I=\int_0^{p+2} f(x)\,dx$$

Soluție: Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^5+x^3+px, g'(x)=5x^4+3x^2+p>0\Rightarrow g$ –injectivă. 7p

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty\Rightarrow g$ – surjectivă 3p

Deci, g –bijectivă, de unde g –inversabilă. Dar, $g(f(x))=(f(x))^5+(f(x))^3+pf(x)=x\Rightarrow$
$(g\circ f)(x)=x\Rightarrow f(x)=g^{-1}(x)\Rightarrow$ 5p

$I=\int_0^{p+2} f(x)\,dx=\int_0^{p+2} g^{-1}(x)\,dx\overset{(*)}{=}$; $(g^{-1}(x)=t\Rightarrow x=g(t), dx=g'(t)dt)$

$\overset{(*)}{=}\int_0^1 t'g'(t)\,dt=\int_0^1(5t^5+3t^3+pt)dt=\dfrac{19+6p}{2}$. 10p

Problema 4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă, astfel încât $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\sqrt[n]{n!}, (\forall)n\in\mathbb{N}; n\geq 2.$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{e}$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(1+\frac{1}{k})^k=1$.

Soluție

a) Funcția fiind integrabilă pe $[0,1]$ avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ (1) 3p

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$. (Criteriul rădăcinii) .....
7p

b) Avem $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right]+e\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 3p

Deoarece f este integrabilă $\Rightarrow f$ mărginită, deci $(\exists)M>0, a.î.\ |f(x)|\leq M, (\forall)x\in[0,1]$
Rezultă

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right]\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right|\leq\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right|$ 5p

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right|}{n}=0$ 3p

Din a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{e}$.

Prin trecere la limită în (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=1.$ 4p