CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a IX-a

Problema 1. (25p)
Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 3$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z}} \leq \sqrt{3}.$$

Problema 2. (25p)
Determinați funcțiile $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\frac{xf(y)+f^2(x)}{f(x+y)} + \frac{xf(y)}{f(x)} = f(x) + f(y), \forall x, y \epsilon \mathbb{N}^*.$$

Problema 3. (25p)
Tangentele în A și B la cercul circumscris triunghiului ABC isoscel ($AC > AB = BC$) se intersectează în P, iar mediatoarea lui $[BC]$ taie BC în M și AC în N.
Demonstrați că $|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN}| = 3\ MN$.

Problema 4. (25p)
Fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numere reale.
Să se arate că aceste numere sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă printre toate diferențele $a_j - a_i$, $1 \leq i < j \leq n$, exact $n - 1$ sunt diferite.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3,5 ore.