CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2023

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a XII-a

Problema 1. (25 p)
Pentru $z_0 \in C$ fixat și pentru fiecare $k \in R^*$ fie funcțiile:
$f_k: C \to C, f_k(z) = kz + (1-k)z_0,$
$g_k: C \to C, g_k(z) = z_0 + \dfrac{k}{\bar{z} - \bar{z_0}}$, *dacă* $z \neq z_0$ *și* $g(z_0) = z_0$.
Să se arate că mulțimea $G = \{f_k \ / k \in R^*\} \cup \{g_k \ / k \in R^*\}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

Problema 2. (25 p)
Se consideră numărul natural $n \geq 2$ și $(G,\cdot)$ un grup de ordin *n*. Arătați că *n* este număr prim dacă și numai dacă funcțiile $f_k : G \to G, f_k(x) = x^k$, pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$.

Problema 3. (25 p)
Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $(f(x))^5 + (f(x))^3 + pf(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}, p > 0$. Să se calculeze:

$$I = \int_0^{p+2} f(x)\,dx$$

Problema 4. (25 p)
Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, astfel încât $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt[n]{n!}, (\forall) n \in \mathbb{N}; n \geq 2.$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{e}$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 1.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3,5 ore.