CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

februarie – martie 2024

SUBIECTE
proba de matematică

SUBIECTUL 1

Determinaţi funcţiile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *cu proprietatea că* $\frac{f(x)+x}{y} = \frac{f(y)+y}{x}$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{N}^*$ *şi* $f(0) = 0$.

Ecuaţia $\frac{f(x)+x}{y} = \frac{f(y)+y}{x}$ este echivalentă cu $y^2 - x^2 + yf(y) - xf(x) = 0$. ……………………………………...3p

Pentru $y = x + 1$, avem: $(x + 1)f(x + 1) - xf(x) = -2x - 1$……………………………………………………5p

Fie $g(x) = xf(x)$. Găsim $g(x + 1) - g(x) = -2x - 1$. 3p

Dăm succesiv lui x valorile 0,1,...,(n-1) în relaţia precedentă şi sumându-le obţinem: $g(n) - g(0) = -n^2$............5p

Din $g(x) = xf(x)$, pentru $x = 0$ obţinem $g(0) = 0f(0) = 0$...3p

Astfel $g(n) = -n^2$, de unde $f(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{-x^2}{x} = -x, \forall x \in \mathbb{N}^*$. 3p

Dar $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{N}$, de unde rezulta ca $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$. Din ipoteza rezulta ca $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$, de unde $x = y, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$, fals. In concluzie nu exista functii cu proprietatea data 3p

SUBIECTUL 2

Demonstrați că, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c are loc relația:

$$\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)\left(b^2+c^2+a^2+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)\left(c^2+a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)} \geq \left(\frac{a^2}{b}+c\right)\left(\frac{b^2}{c}+a\right)\left(\frac{c^2}{a}+b\right)$$

În ce condiții are loc egalitatea?

Solutie.

$$E_1=\sqrt{\left(a^2+\ b^2+c^2+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a}\underset{CBS}{\geq}\frac{a^2+bc}{a}$$ 5p

$$E_2=\sqrt{\left(b^2+\ c^2+\ a^2+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)}=\frac{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}}{b}\underset{CBS}{\geq}\frac{b^2+ac}{b}$$ 5p

5p

$$E_3=\sqrt{\left(c^2+\ a^2+\ b^2+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)}=\frac{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}{c}\underset{CBS}{\geq}\frac{c^2+ab}{a}$$

Înmulțim relațiile obținute:

5p

$$E_1\cdot E_2\cdot E_3\ \geq\ \frac{a^2+bc}{a}\cdot\frac{b^2+ac}{b}\cdot\frac{c^2+ab}{c}=\frac{a^2+bc}{b}\cdot\frac{b^2+ac}{c}\cdot\frac{c^2+ab}{a}==\left(\frac{a^2}{b}+c\right)\left(\frac{b^2}{c}+a\right)\left(\frac{c^2}{a}+b\right)$$

Egalitatea se obține dacă și numai dacă $a=b=c$. 5p

SUBIECTUL 3

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100} \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_{100}}{b_{100}}$ este o progresie aritmetică neconstantă cu cel puţin un termen care nu este întreg.
Arătaţi că există 50 de numere printre $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$, oricare două neprime între ele.

Soluţie:
Fie $r \in \mathbb{Q}^*$ raţia progresiei date. Dacă $r \in \mathbb{Z}$, atunci avem $\frac{a_{i+k}}{b_{i+k}} = \frac{a_i}{b_i} + kr$, relaţie care se rescrie $a_{i+k}b_i = b_{i+k}(a_i + krb_i)$, pentru orice $1 \leqslant i < i+k \leqslant n$. Dacă $(b_i, b_{i+k}) = 1$, atunci $b_i | a_i + krb_i$, adică $b_i | a_i$. Atunci progresia ar avea doar termeni întregi, contradicţie. Atunci $(b_i, b_{i+k}) \neq 1$, pentru orice $1 \leqslant i < i+k \leqslant n$, deci putem alege $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ **(10p)**.
Dacă $r \notin \mathbb{Z}$, atunci $r = \frac{x}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*, (x,y) = 1$ şi $y \geqslant 2$. Considerăm un număr prim $p | y$. Dacă avem $p \nmid b_i$ şi $p \nmid b_{i+k}$, atunci, din $\frac{a_{i+k}}{b_{i+k}} - \frac{a_i}{b_i} = k\frac{x}{y}$, adică $y(a_{i+k}b_i - a_i b_{i+k}) = kxb_ib_{i+k}$. Deducem că $p | k$. Atunci, fie i indicele minim pentru care $p \nmid b_i$. Atunci, singurii indici j pentru care $p \nmid b_j$ pot fi $j \in \{i, i+p, i+2p, \ldots, i + p \cdot \left[\frac{100-i}{p}\right]\}$, care sunt în număr de $\left[\frac{100-i}{p}\right] + 1$. **(10p)**
Deducem că pentru restul de $99 - \left[\frac{100-i}{p}\right]$ indici j avem $p | b_j$. Arătăm că $99 - \left[\frac{100-i}{p}\right] \geqslant 50$, adică $\left[\frac{100-i}{p}\right] \leqslant 49$. Presupunem că $\left[\frac{100-i}{p}\right] \geqslant 50$. Atunci avem succesiv

$$50 = \frac{100}{2} \geqslant \frac{100}{p} > \frac{100-i}{p} \geqslant \left[\frac{100-i}{p}\right] \geqslant 50,$$

contradicţie. Atunci alegem aceşti b_j şi condiţia problemei este satisfăcută. **(5p)**

SUBIECTUL 4

Fie M un punct situat în planul unui triunghi ABC şi X,Y,Z centrele de greutate ale triunghiurilor BMC, CMA, respectiv AMB. Să se arate că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.

Soluţie.

Raportam planul la un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*. Atunci,
$\overrightarrow{MX}=\dfrac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3}, \overrightarrow{MY}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{3}, \overrightarrow{MZ}=\dfrac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}}{3}$ 9p

Fie D un punct pe AX. Atunci

$\overrightarrow{MD}=\alpha\overrightarrow{MA}+(1-\alpha)\overrightarrow{MX}=\alpha\overrightarrow{MA}+\dfrac{1-\alpha}{3}\overrightarrow{MB}+\dfrac{1-\alpha}{3}\overrightarrow{MC}, \alpha\in\mathbb{R}.$ 6p

Căutăm o valoare a lui α pentru care $\overrightarrow{MD}$ să aibă o exprimare simetrică în $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MC}$, deci $\alpha=\dfrac{1-\alpha}{3}$, de unde $\alpha=\dfrac{1}{4}$. 5p

Pentru această valoare a lui α,
$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MC}.$ 3p

Datorită simetriei relaţiei precedente rezultă că punctul D se află şi pe dreptele *BY şi CZ*....................2p