CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
februarie – martie 2024

BAREM
proba de matematică- individual
Clasa a X-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Fie a $\in(0;1)$ și b$\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^{b^2+b+1}=\log_a\left(b^2+b+1\right)$. Arătați că $[b]=-1$ și $a\ge\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ (prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a lui x).

Soluție

Se știe că $x\to a^x$ și $x\to\log_a x$ sunt funcții inverse.

Cum $a\in(0;1)$, $\exists!\ x_0\in(0;1)$ astfel încât $a^{x_0}=\log_a x_0=x_0$.

.... **10 puncte**

Atunci $b^2+b+1=a^{b^2+b+1}\in(0;1)$. Obținem $b^2+b+1<1\Leftrightarrow b\in(-1;0)$, adică $[b]=-1$.

.... **5 puncte**

Cum $f_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, rezultă că $b^2+b+1\ge\frac{3}{4}$.

Funcția a^x este strict descrescătoare pentru $a\in(0;1)$. Obținem $\frac{3}{4}\le b^2+b+1=a^{b^2+b+1}\le a^{\frac{3}{4}}$.

.... **5 puncte**

Din $a^{\frac{3}{4}}\ge\frac{3}{4}$, pentru $x>0$, rezultă $\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^x$.

Luăm $x=\frac{4}{3}$ și obținem $a\ge\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

.... **5 puncte**

Subiectul 2 (25 puncte)

Să se determine funcțiile monotone $f:(2024;+\infty)\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$f(x)+f(y)=f(xy-2024x-2024y+2024\cdot 2025),\ \forall\ x,y\in(2024;+\infty)$

Soluție

Observăm că $xy-2024x-2024y+2024\cdot 2025=(x-2024)(y-2024)+2024$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

.... **5 puncte**

Considerăm funcția $g:(2024;+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln(x-2024)$. Se demonstrează că g este bijectivă și strict crescătoare, $g^{-1}:\mathbb{R}\to(2024;+\infty),\ g^{-1}(x)=e^x+2024,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h=f\circ g^{-1}$. Funcția h este monotonă fiind compunerea a două funcții monotone.

Se obține $h(x)+h(y)=f\left(g^{-1}(x)\right)+f\left(g^{-1}(y)\right)=f\left(g^{-1}(x+y)\right)=h(x+y),\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$

.... **10 puncte**

Deoarece funcția este aditivă pe $\mathbb{R}$, din ecuația funcțională a lui Cauchy, se obține că $h(x)=c\cdot x,\ \forall\, x\in\mathbb{Q},\ c=h(1)\in\mathbb{R}$.

.... **5 puncte**

Pp. f.r.g că h este crescătoare. Rezultă că $c\geq 0$.

Dacă c=0 atunci, considerând $x\in\mathbb{R}$ și folosind definiția părții întregi, rezultă că $h([x])\leq h(x)\leq h([x]+1)$

$0\leq h(x)\leq 0\Rightarrow h(x)=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

Dacă $c>0$, pp. prin R.A. că $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $h(x_0)\neq c\cdot x_0$. Rezultă că $h(x_0)<c\cdot x_0$ sau $h(x_0)>c\cdot x_0$. În cazul în care $h(x_0)<c\cdot x_0$, folosind densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$, există $r\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{h(x_0)}{c}<r<x_0$. Obținem $h(r)\leq h(x_0)\Leftrightarrow c\cdot r\leq h(x_0)\Leftrightarrow r\leq\frac{h(x_0)}{c}$, contradicție.

Analog, pentru cazul $h(x_0)>c\cdot x_0$, obținem contradicție. Prin urmare, $h(x)=c\cdot x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

În concluzie, $f=h\circ g$, $f(x)=h(g(x))=c\cdot g(x)=c\cdot\ln(x-2024),\ \forall\, x\in(2024;+\infty)$

.... **5 puncte**

<u>Subiectul 3 (25 puncte)</u>

Fie H ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic ABC și A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Cercul cu centrul în punctul A' și raza egală cu $A'H$ intersectează latura BC în punctele A_1 și A_2. Analog se definesc punctele B_1 și B_2, respectiv C_1 și C_2. Arătați că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 și C_2 sunt conciclice.

Cătălin Barbu, Bacău

<u>Soluție</u>

În planul complex alegem un reper cu centrul în O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notând cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare avem:

$$O(0),\ H(a+b+c),\ A'\left(\frac{b+c}{2}\right),\ B'\left(\frac{c+a}{2}\right),\ C'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

.... **10 puncte**

Vom arăta că $OA_1=OB_1$. Avem

$$HA'=\left|a+b+c-\frac{b+c}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot|2a+b+c|\ ,\ \ OA'=\left|\frac{b+c}{2}\right|,$$

$$HB'=\left|a+b+c-\frac{a+c}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot|2b+a+c|,\ \ OB'=\left|\frac{a+c}{2}\right|.$$

Utilizând relația $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ și efectuând calculele se obțin egalitățile:

$$OA_1^2 = A'O^2 + A'A_1^2 = A'O^2 + A'H^2 = \frac{2|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + c\bar{a} + a\bar{c}}{2}$$

și

$$OB_1^2 = B'O^2 + B'B_1^2 = B'O^2 + B'H^2 = \frac{2|b|^2 + |a|^2 + |c|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + c\bar{a} + a\bar{c}}{2}.$$

Ținând cont de faptul că $|a| = |b| = |c|$, rezultă că $OA_1^2 = OB_1^2$, de unde $OA_1 = OB_1$.

.... **10 puncte**

Deoarece $OA_1 = OA_2$ și $OB_1 = OB_2$, rezultă $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2$. Analog se arată că $OA_1 = OC_1 = OC_2$, de unde rezultă că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 și C_2 sunt conciclice.

.... **5 puncte**

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie $x > 0$ astfel încât $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$. Arătați că $x = 1$.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluție

Deoarece $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{Q}$ pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, deducem că există două șiruri de numere naturale nenule $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ astfel încât $\sqrt[n]{x} = \frac{a_n}{b_n}$ și $(a_n, b_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În particular avem $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = x = \left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)^{n+1}$, de unde rezultă că $a_n^n \cdot b_{n+1}^{n+1} = a_{n+1}^{n+1} \cdot b_n^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

.... **10 puncte**

Datorită condiției $(a_n, b_n) = 1$, deducem că $a_n^n = a_{n+1}^{n+1}$ și $b_{n+1}^{n+1} = b_n^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde obținem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \leqslant 1$ și $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{b_{n+1}}} \leqslant 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Am obținut că șirurile $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ sunt două șiruri descrescătoare de numere naturale nenule, prin urmare fiecare dintre cele două șiruri este constant de la un loc încolo. Altfel spus există $a, n_1 \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $a_n = a,\ \forall n \ge n_1$ și există $b, n_2 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_n = b,\ \forall n \ge n_2$.

.... **10 puncte**

Pentru $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ avem $\sqrt[n]{x} = \frac{a}{b}$ și $\sqrt[n+1]{x} = \frac{a}{b}$, de unde obținem $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$, adică $\frac{a}{b} = 1$. Rezultă $a = b$, adică $x = 1$.

.... **5 puncte**