CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
februarie – martie 2024

SUBIECTE
proba de matematică- individual
clasa a XI-a

Subiectul 1 (25 de puncte).

a) Să se arate că: $\begin{vmatrix} \ln\frac{2}{15} & \ln 4 & \ln 4 \\ \ln 9 & \ln\frac{3}{10} & \ln 9 \\ \ln 25 & \ln 25 & \ln\frac{5}{6} \end{vmatrix} > \ln 8\cdot\ln 27\cdot\ln 125$.

b) Să se arate că sistemul următor nu are soluții în S_5: $\begin{cases} x^3y^2z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} x \\ x^2y^3z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} y^2 \\ xyz^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$.

Daniel Sitaru

Soluție.

a) $$\begin{vmatrix} \ln 2-\ln 3-\ln 5 & 2\ln 2 & 2\ln 2 \\ 2\ln 3 & \ln 3-\ln 5-\ln 2 & 2\ln 3 \\ 2\ln 5 & 2\ln 5 & \ln 5-\ln 2-\ln 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln 2+\ln 3+\ln 5 & \ln 2+\ln 3+\ln 5 & \ln 2+\ln 3+\ln 5 \\ 2\ln 3 & \ln 3-\ln 5-\ln 2 & 2\ln 3 \\ 2\ln 5 & 2\ln 5 & \ln 5-\ln 2-\ln 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\ln 2+\ln 3+\ln 5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\ln 3 & \ln 3-\ln 5-\ln 2 & 2\ln 3 \\ 2\ln 5 & 2\ln 5 & \ln 5-\ln 2-\ln 3 \end{vmatrix} = (\ln 2+\ln 3+\ln 5)^3 \text{.....................10p}$$

$$(\ln 2+\ln 3+\ln 5)^3 > \left(3\sqrt[3]{\ln 2\ln 3\ln 5}\right)^3 = 27\ln 2\ln 3\ln 5 = \ln 2^3\ln 3^3\ln 5^3 = \ln 8\ln 27\ln 125 \text{ ....5p}$$

b) Presupunem că sistemul admite soluții . Atunci:

$$\begin{cases} \varepsilon(x^3y^2z) = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x^2y^3z) = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\varepsilon(y^2) \\ \varepsilon(xyz^4) = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\varepsilon(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varepsilon(x))^3\cdot(\varepsilon(y))^2\cdot\varepsilon(z) = -\varepsilon(x) \\ (\varepsilon(x))^2\cdot(\varepsilon(y))^3\cdot\varepsilon(z) = -(\varepsilon(y))^2 \\ \varepsilon(x)\cdot\varepsilon(y)\cdot(\varepsilon(z))^4 = -\varepsilon(x) \end{cases} \text{ ....5p}$$

Prin înmulțire: $(\varepsilon(x))^6\cdot(\varepsilon(y))^6\cdot(\varepsilon(z))^6 = -(\varepsilon(x))^2\cdot(\varepsilon(y))^2$. Contradicție.........................5p

Subiectul 2 (25 de puncte).

Fie p un număr prim. Să se demonstreze că $\det(A+A^t)\neq p$, oricare ar fi matricea A de ordin p cu elemente întregi.

Mihai Opincariu

Soluție.

Presupunem prin absurd că există $A\in M_p(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A+A^t)=p$. Fie $f(x)=\det(A+xA^t),\ x\in\mathbb{Z}$. Cum f este funcție polinomială cu coeficienți întregi, avem $2\,|\,f(1)+f(-1)$.

Deci $2\,|\det(A+A^t)+\det(A-A^t)$. (1)…………………………………………………………5p

Dacă p este număr impar avem $\det(A-A^t)=\det(A-A^t)^t=\det(A^t-A)=(-1)^p\det(A-A^t)$ și deci $\det(A-A^t)=0$. Din (1) rezultă că $\det(A+A^t)\,\vdots\,2\Rightarrow p\,\vdots\,2$ contradicție. ……………………………..….10p

Deci p este par și prim, adică $p=2$. Rezultă că $A\in M_2(\mathbb{Z})$ și $\det(A+A^t)=2$. ……………………5p

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Atunci $\det(A+A^t)=\begin{vmatrix} 2a & b+c\\ b+c & 2d\end{vmatrix}=4ad-(b+c)^2\Rightarrow 4ad-(b+c)^2=2\Rightarrow (b+c)^2$ este divizibil cu 2 și nedivizibil cu 4, absurd……………………………………………………………………..5p

În consecință presupunerea făcută este falsă.

Subiectul 3 (25 de puncte).

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Dacă funcția f^{2024} are limită în orice punct din $\mathbb{R}$, demonstrați că f este funcție continuă.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluție.

Fie $a\in\mathbb{R}$. Deoarece funcția f are proprietatea lui Darboux, rezultă că există un șir strict crescător $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n\nearrow a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2024}(a_n)=f^{2024}(a)$ și cum f^{2024} are limită în a, deducem că $\lim\limits_{x\to a} f^{2024}(x)=f^{2024}(a)$, adică funcția f^{2024} este continuă în a.

Cum a a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}$, rezultă că funcția f^{2024} este continuă pe $\mathbb{R}$ …………………………**10p**

Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Să demonstrăm că funcția f este continuă în x_0. Distingem două cazuri:

i) Dacă $f(x_0)\neq 0$, atunci $f^{2024}(x_0)>0$; deoarece funcția f^{2024} este continuă, rezultă că există un interval $I=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ așa încât $f^{2024}(x)>0,\ \forall x\in I$, iar de aici deducem că $f(x)\neq 0,\ \forall x\in I$. Cum funcția f are proprietatea lui Darboux, rezultă că f păstrează semn constant pe *I*, și anume semnul lui $f(x_0)$.

Dacă $f(x_0)>0$ avem $f(x)=\sqrt[2024]{f^{2024}(x)}$, $\forall x\in I$, iar dacă $f(x_0)<0$ avem $f(x)=-\left(\sqrt[2024]{f^{2024}(x)}\right),\ \forall x\in I$. În ambele situații funcția f este compusa unor funcții continue pe *I*, prin urmare f este continuă pe *I*. Evident $x_0\in I$, deci f este continuă în punctul x_0 ………………………..**10p**

ii) Dacă $f(x_0)=0$, deoarece f^{2024} este continua deducem că pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \to x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f^{2024}(x_n) = f^{2024}(x_0)=0$. Dar $f^{2024}(x_n)\to 0$ implică $f(x_n)\to 0 = f(x_0)$, adică funcția f este continuă în punctul x_0 ……………………………………………………………………………….………**5p**

Cum x_0 a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}$, rezultă că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 4 (25 de puncte).

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \dfrac{1}{\sqrt{i\cdot j}}}{\sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}$.

Marian Ursărescu

Soluție.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}\cdot\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{\sqrt{i\cdot j}}}{n} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{\sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \qquad (2)\text{ ……...…...5p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e \text{ și } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e \qquad (3)\text{ ………….5p}$$

Din (2) și (3) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{1\cdot\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}=e^2$ (4)……………………………………...…5p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{\sqrt{i\cdot j}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=2 \qquad (5)\text{ ………………………………...……5p}$$

Din (1), (4) și (5) rezultă $L=2e^2$ ………………………………………………………………..5p