Colegiul de Informatică, Piatra Neamţ

Concursul naţional PROSOFT@NT

Ediţia 2024

Bareme - Clasa a 12-a

Problema 1

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x\sin(\pi x)}{2-\sin^2(\pi x)}$ şi şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $a_n = \displaystyle\int_0^1 \{nx\}^2 \cdot f(x)dx$.

a) Determinaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătaţi că $a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} (nx)^2 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) dx$, pentru orice $n \geqslant 1$.

c) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Barem

a) Avem $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \frac{(1-x)\sin(\pi-\pi x)}{2-\sin^2(\pi-\pi x)}dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{2-\sin^2(\pi x)}dx - I$.
Atunci $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+\cos^2(\pi x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{4}$ **(10p)**.

b) Observăm că $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (nx-k)^2 f(x)dx = \int_0^{1/n} (nx)^2 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) dx$ **(5p)**.

c) Dacă $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right)$, ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$, iar $a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} n^3x^2 b_n dx$ **(5p)**.

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ pentru care $|b_n - 1/4| < \varepsilon$, pentru orice $n > N_\varepsilon$. Pentru $n > N_\varepsilon$ avem $\left|a_n - \dfrac{1}{4}\cdot \displaystyle\int_0^{1/n} n^3x^2dx\right| < \varepsilon \cdot \int_0^{1/n} n^3x^2dx$, deci $\left|a_n - \dfrac{1}{12}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{12}$ **(5p)**.

Problema 2

Fie G un grup finit, f un automorfism al său cu proprietatea că $\{x \in G | f(x) = x\} = \{e\}$, unde e este elementul neutru din G. Considerăm funcţia $g : G \to G$ definită prin $g(x) = f(x) \cdot x^{-1}$.

a) Arătaţi că g este bijectivă.

b) Dacă g este morfism, arătaţi că G este abelian.

Barem

a) Dacă $f(x) \cdot x^{-1} = f(y) \cdot y^{-1}$, folosind proprietăţile morfismelor avem $f^{-1}(y)f(x) = y^{-1}x$, adică $f(y^{-1})f(x) = y^{-1}x$, sau $f(y^{-1}x) = y^{-1}x$ **(10p)**.

Din condiţia din ipoteză, rezultă $y^{-1}x = e$, deci $x = y$ adică g este injectiv. Cum G este finit, g este bijecţie **(5p)**.

b) Dacă g este morfism, pentru orice $x, y \in G$ avem $g(xy) = g(x)g(y)$, adică $f(xy)y^{-1}x^{-1} = f(x)x^{-1}f(y)y^{-1}$ sau $f(x)f(y)y^{-1}x^{-1} = f(x)x^{-1}f(y)y^{-1}$, care se reduce la $g(y)x^{-1} = x^{-1}g(y)$ (1).

Fie $a, b \in G$. Alegem $x = a^{-1}$ şi, întrucât g este surjectivă (din (a)), alegem $y \in G$ astfel încât $g(y) = b$. Din (1) vom avea $ba = ab$ **(10p)**.

Problema 3

Fie $a \geq 1$ şi $f : [1, a] \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă, cu proprietatea că $f'(x) + xf''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, a]$. Arătaţi că

$$\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx \geq f(\sqrt{a}) \cdot \ln a.$$

Barem

Observvăm că $f(\sqrt{a}) \cdot \ln a = \int_1^a (f(\sqrt{x}) \cdot \ln x)' dx$ **(5p)**.

Atunci, arătăm că $\frac{f(x)}{x} \geq (f(\sqrt{x}) \cdot \ln x)'$. Dar $(f(\sqrt{x}) \cdot \ln x)' = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{f(\sqrt{x})}{x}$ **(5p)**.

Atunci, avem de arătat că $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{f(\sqrt{x})}{x} \leq \frac{f(x)}{x}$, care este echivalent cu $\sqrt{x} \cdot f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{\ln x}{2} + f(\sqrt{x}) \leq f(x)$ sau $f(x) - f(\sqrt{x}) \geq \sqrt{x} \cdot f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{\ln x}{2}$ (1).

Condiţia din ipoteză se scrie $(xf'(x))' \geq 0$, adică $xf'(x)$ este crescătoare pe $[1, a]$ (2).**(5p)**.

Din (2) avem $f(x) - f(\sqrt{x}) = \int_{\sqrt{x}}^x f'(y) dy = \int_{\sqrt{x}}^x y f'(y) \cdot \frac{1}{y} dy \geq \sqrt{x} f'(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{y} dy = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{\ln x}{2}$, adică relaţia (1) pe care ne dorim să o demonstrăm. **(10p)**.

Problema 4

Fie G un grup finit cu proprietatea că, pentru orice $a, b \in G$, dacă $(ord(a), ord(b)) \neq 1$, atunci există $k \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $a = b^k$. Arătaţi că G este ciclic.

Barem

Fie $|G| = n$. Presupunem că există două numere prime p, q, nu neapărat distincte şi un element $a \in G$ cu $ord(a) = pq$. Atunci $pq|n$, deci $p|n$. Conform teoremei lui Lagrange, există un element $b \in G$ cu $ord(b) = p$. Atunci $(ord(a), ord(b)) = p \neq 1$, deci există $k \in \mathbb{N}$ cu $a = b^k$ şi atunci avem $a^p = b^{kp} = (b^p)^k = e$, ceea ce contrazice $ord(a) = pq$. Atunci, dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, avem $\{ord(a)|a \in g\} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ (1) **(10p)**.

Fie $a \in G$ cu $ord(a) = p_i$. Atunci $G_i = \{e, a, \dots, a^{p_i - 1}\}$ este grupul generat de a iar dacă $b \in G$ are $ord(b) = p_i$, atunci $(ord(b), ord(a)) = p_i \neq 1$, deci există $k \in \mathbb{Z}$ cu $b = a^k$, adică $b \in G_a$ (2) **(5p)**.

Din (1) şi (2) deducem că $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$, deci $n = |G| = \left| \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i \right| = 1 + \sum\limits_{i=1}^{k} (p_i - 1) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i - (k-1)$.

Atunci $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} p_i - (k-1) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \geqslant p_1 p_2 \dots p_k$, inegalitate care are loc doar pentru $k = 1$ şi $a_1 = 1$. Atunci $|G|$ este prim, deci G este ciclic **(10p)**.