



CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

februarie – martie 2024

SUBIECTE

proba de matematică,

Clasa a VI- a

1. a) O echipă de 20 de muncitori, lucrând câte 6 ore pe zi, pot face 240 de piese în 10 zile. Câte zile sunt necesare pentru 15 muncitori să facă 360 de piese, dacă lucrează 8 ore pe zi.

Rezolvare:

20 muncitori6 ore.....240 p10 zile

20 muncitori6 ore.....360 px zile dp, x= 15 zile 1p

20 muncitori6 ore.....360 p15 zile

20 muncitori8 ore.....360 py zile ip, y=11,25 zile 1p

20 muncitori8 ore.....360 p11,25 zile

15 muncitori8 ore.....360 pz zile ip, z=15 zile 1p

b) Determinați numerele \overline{abc} , știind că numerele \overline{ab} , \overline{bc} și \overline{ca} sunt direct proporționale cu 3, 2 și 6, iar suma cifrelor numărului \overline{abc} este divizibilă cu 7.

Rezolvare:

\overline{ab} , \overline{bc} și \overline{ca} sunt direct proporționale cu 3, 2 și 6 se scrie

$$\frac{\overline{ab}}{3} = \frac{\overline{bc}}{2} = \frac{\overline{ca}}{6} = \frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{3+2+6} \quad 1p$$

$$\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{3+2+6} = \frac{11(a+b+c)}{11} = a+b+c \quad 1p$$

$$7 / a+b+c \leq 27 \Rightarrow a+b+c \in \{7,14,21\} \quad 1p$$

Numerele \overline{abc} sunt 214 și 428. 1p



CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

februarie – martie 2024

2. a) Determinați numerele prime a și b pentru care $34a + 9b = 2024$.

Rezolvare:

Dacă $34a + 9b = 2024$, $34a$ și 2024 sunt numere pare, rezultă $9b$ trebuie să fie par. 1p

$9b$ este par, b număr prim, rezultă $b=2$ 1p

$a=59$ 1p

b) Determinați numerele naturale p știind că numerele $p, p^2 + 4, p^2 + 6$ sunt simultan prime.

Rezolvare:

Dacă $p = 2 \Rightarrow p^2 + 4 = 8$ care nu este număr prim. $p \neq 2$. Dacă $p = 3, p^2 + 4 = 13, p^2 + 6 = 15$ care nu este număr prim. $p \neq 3$. Dacă $p = 5, p^2 + 4 = 29, p^2 + 6 = 31$ numere prime. $p = 5$. 1p

Singurul număr prim par nu verifică. Celelalte numere prime sunt impare, deci au ultima cifră 1 sau 3 sau 5 sau 7 sau 9. $u(p^2) \in \{1, 9, 5\}$. 1p

Dacă $u(p^2) = 1 \Rightarrow u(p^2 + 4) = 5 \Rightarrow 5 / p^2 + 4$. Dar $p^2 + 4$ este număr prim, atunci $p^2 + 4 = 5$ fals. 1p

Dacă $u(p^2) = 9 \Rightarrow u(p^2 + 6) = 5 \Rightarrow 5 / p^2 + 6$. Dar $p^2 + 6$ este număr prim, atunci $p^2 + 6 = 5$ fals.

Dacă $u(p^2) = 5 \Rightarrow u(p) = 5 \Rightarrow p = 5$. 1p

3. a) Fie unghiul $\sphericalangle MON = 160^\circ$. Se construiesc în interiorul său semidreptele $(OA, (OB$, respectiv $(OC$ astfel încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle MOA, \sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle CON$ să fie invers proporționale cu numerele $0,5; 0,0(6); 0, (3)$ și $\frac{1}{12}$, iar $(OA$ este în interiorul $\sphericalangle MOB, (OB$ este în interiorul $\sphericalangle AOC$. Arătați că $(OB$ este bisectoarea $\sphericalangle AON$.

Barem de corectare și notare

$$\frac{\sphericalangle MOA}{2} = \frac{\sphericalangle AOB}{15} = \frac{\sphericalangle BOC}{3} = \frac{\sphericalangle CON}{12} = \frac{160}{32} = 5$$

1p



CONCURSUL PROSOFT@NT-JUNIOR

februarie – martie 2024

$$\sphericalangle MOA = 10^{\circ}, \sphericalangle AOB = 75^{\circ}, \sphericalangle BOC = 15^{\circ} \text{ și } \sphericalangle CON = 60^{\circ} \quad 1\text{p}$$

$$\sphericalangle AOB = 75^{\circ}, \sphericalangle BON = 15^{\circ} + 60^{\circ} = 75^{\circ}. \text{ Deci } (OB \text{ este bisectoarea } \sphericalangle AON). \quad 1\text{p}$$

b) Fie punctele A, C, B (în această ordine) pe dreapta d astfel încât $AC < CB$. Punctul D este simetricul lui C față de A , punctul E este simetricul lui C față de B , iar M și N sunt mijloacele segmentelor DE , respectiv AB , $MN = 5$ cm. Arătați că punctul N este între C și M și calculați lungimea segmentului CN .

Barem de corectare și notare

$$AC=AD=x \text{ și } BC=BE=y. \text{ Obținem } CM= y-x,$$

$$CN = \frac{y-x}{2} \quad 1\text{p}$$

$$CN < CM \text{ deci } N \text{ este în stânga lui } M \quad 1\text{p}$$

$$AN > AC \text{ deci } N \text{ este în dreapta lui } C. \quad 1\text{p}$$

$$MN=CN=5\text{cm}. \quad 1\text{p}$$

4. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în D , iar perpendiculara în B pe BC intersectează dreapta AC în E .

a) Arătați că triunghiul BDE este isoscel.

b) Dacă $\sphericalangle ACB = 30^{\circ}$, arătați că D este mijlocul segmentului EC .

Barem de rezolvare și notare

$$\text{a) În } \triangle ADB, \sphericalangle BAD = 90^{\circ} \text{ atunci } \sphericalangle ADB = 90^{\circ} - \sphericalangle ABD = 90^{\circ} - \frac{\sphericalangle ABC}{2} \text{ (BD bisectoarea } \sphericalangle ABC) \quad 1\text{p}$$

$$\sphericalangle EBC = 90^{\circ} \Rightarrow \sphericalangle EBD = 90^{\circ} - \sphericalangle DBC = 90^{\circ} - \frac{\sphericalangle ABC}{2} \quad 1\text{p}$$

Deci triunghiul BDE este isoscel. 1p

$$\text{b) Dacă } \sphericalangle ACB = 30^{\circ}, \text{ atunci } \sphericalangle ABC = 60^{\circ} \Rightarrow \sphericalangle EBD = 60^{\circ}. \quad 1\text{p}$$

Cum triunghiul BDE este isoscel, din suma unghiurilor în triunghi obținem triunghiul BDE echilateral, deci $BD=DE$. 1p

Din (BD bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ABC = 60^{\circ} \Rightarrow \sphericalangle DBC = 30^{\circ} = \sphericalangle ACB$

$$\Rightarrow \text{triunghiul } DBC \text{ este isoscel} \Rightarrow BD = DC \quad 1\text{p}$$

$$\Rightarrow DE = DC \Rightarrow D \text{ este mijlocul segmentului } EC. \quad 1\text{p}$$