INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ PIATRA NEAMȚ

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

februarie – martie 2024

BAREM
Proba de matematică – clasa a VII-a

1.a) Arătați că $a=\sqrt{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}$ este număr irațional.

b) Dacă $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2024}$ sunt numere naturale impare arătați că $b=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+\ldots+(x_{2024})^2-1}$ este irațional.

a) Soluție: $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2=165$......................1p

$144<165<169 \Rightarrow a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.............................1p

b) Orice număr natural pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k+1$...........2p

Numerele $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2024}$ fiind impare, atunci fiecare din pătratele perfecte $(x_1)^2, (x_2)^2, (x_3)^2, \ldots, (x_{2024})^2$ sunt de forma . $4k+1$ 1p

Fiind 2024 (multiplu de 4) numere de forma $4k+1$, atunci rezultatul $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+\ldots+(x_{2024})^2$ este de forma $4k$ 1p

Deci $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+\ldots+(x_{2024})^2-1$ este de forma $4k+3$, ce nu poate fi pătrat perfect,

Deci $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.....1p

2. a) Să se calculeze suma $S=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2023\cdot 2024}}$

b) Aflați toate numerele naturale nenule $n \leq 2024$ pentru care $S_n=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ este număr rațional.

Soluție:

a) $S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2023\cdot 2024}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{2023\cdot 2024}}$.......................2p

$S=1-\frac{1}{\sqrt{2024}}$.........................1p

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

februarie – martie 2024

b) $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$......................2p

S_n este număr rațional, rezultă că $n+1$ este pătrat perfect..................1p

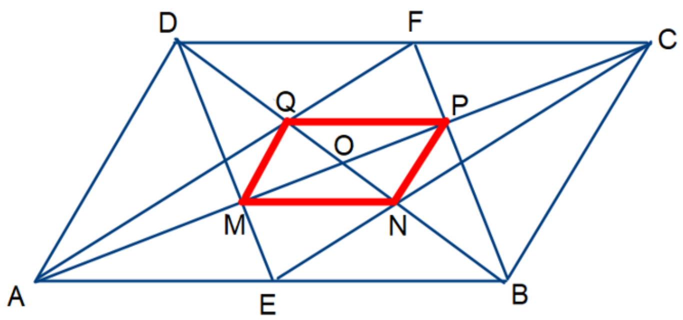
Finalizare, n∈ $\{2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, \dots, 45^2-1\}$.........................1p

3. În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctele E și F mijloacele laturilor AB și CD. Dacă AC intersectează dreptele DE și FB în punctele M și P, iar BD intersectează dreptele CE și AF în N respectiv, Q.

a) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Aflați raportul dintre aria triunghiului MON și aria paralelogramului $ABCD$.

Soluție:



$a) \left.\begin{matrix} ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap BD = \{O\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} O \text{ mij } BD \\ O \text{ mij } AC \end{cases}$ (1).................................1p

În $\triangle ABD, DE$ și AO mediane, $DE \cap AO = \{M\} \Rightarrow M =$ centru de greutate în $\triangle ABD \Rightarrow OM = \frac{1}{3}OA$ (2)

În $\triangle ABC, CE$ și BO mediane, $CE \cap BO = \{N\} \Rightarrow N =$ centru de greutate în $\triangle ABC \Rightarrow ON = \frac{1}{3}OB$ (3)

În $\triangle BCD, BF$ și CO mediane, $BF \cap CO = \{P\} \Rightarrow P =$ centru de greutate în $\triangle BCD \Rightarrow OP = \frac{1}{3}OC$ (4)

În $\triangle ADC, AF$ și DO mediane, $AF \cap DO = \{Q\} \Rightarrow Q =$ centru de greutate în $\triangle ABC \Rightarrow OQ = \frac{1}{3}OD$ (5)...2p

$\left.\begin{array}{l}\text{Din } (1),(2),(4) \Rightarrow OM \equiv OP \\ \text{Din } (1),(2),(4) \Rightarrow ON \equiv OQ\end{array}\right\} \Rightarrow$
$MNPQ$ paralelogram(diagonalele se înjumătățesc)..................1p

b) $ABCD$ paralelogram, rezultă că $\mathcal{A}_{ABCD} = 4\mathcal{A}_{AOB}$. 1p

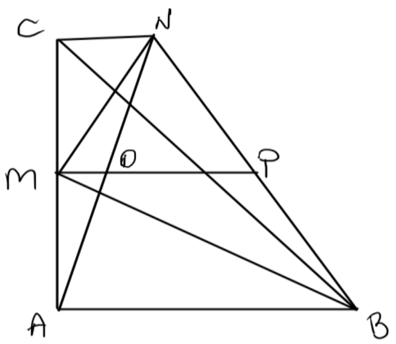
$\frac{OM}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathcal{A}_{AOB} = 3\mathcal{A}_{MOB}$.

$\frac{ON}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathcal{A}_{MOB} = 3\mathcal{A}_{MON}$...............................1p

În concluzie, $\frac{\mathcal{A}_{MON}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{36}$.........................1p

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și punctul M mijlocul laturii AC. Punctele A și N se află de o parte și de alta a dreptei BM astfel încât $MN \perp BM$ și $BN = AB + CN$. Arătați că patrulaterul $ABNC$ este trapez dreptunghic.(E:16423/G.M. 11/2022)

Soluție:



Fie P mijlocul lui BN. MP= mediană în triunghiul dreptunghic $BMN \Rightarrow MP = \frac{BN}{2} = \frac{AB+CN}{2}$.........................1p

Fie O mijlocul lui AN.

În triunghiul ACN, OM =l.m. $\Rightarrow OM \parallel CN, OM = \frac{CN}{2}$ 1p

În triunghiul ABN, OP =l.m. $\Rightarrow OP \parallel AB, OP = \frac{AB}{2}$ 1p

Obținem că $MP = MO + OP \Rightarrow M, O, P$ coliniare...........2p

$CN \parallel MP \parallel AB \Rightarrow ABNC$ trapez. Dar, $\sphericalangle A = 90^{o} \Rightarrow$ $ABNC$ trapez dreptunghic.................2p