CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
februarie – martie 2024

Barem de corectare și notare
proba de matematică
clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Determinați numerele întregi x, y, z știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
$x^2 \le 2x + y - z,\ \ y^2 \le 2y + z - x$ și $z^2 \le 2z + x - y$.

b) Se dau a, b, c numere întregi și $x = 2024^{a+b-2c}$, $y = 2024^{b+c-2a}$, $z = 2024^{a+c-2b}$.
Demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}}$ este număr rațional.

Soluție:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x + 2y + 2z$ (1p)
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 3$ (1p)
$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x-1| \le 1, |y-1| \le 1, |z-1| \le 1$ (1p)
$x, y, z \in \{0,1,2\}$ și determinarea soluțiilor (1p)

b) $x \cdot y \cdot z = 2024^0 = 1$ (1p)
$\frac{1}{1+x+yx} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+\frac{1}{y}} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} =$ (1p)
$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1+y}{1+y+yz} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1+y}{1+y+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x+xy}{1+x+xy} = 1 \in \mathbb{Q}$ (1p)

SUBIECTUL II

Se consideră expresia $E(x,y) = 3\sqrt{1-2y+y^2} + 2\sqrt{x^2-6x+9} - |2x-3y-3|$ cu $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $E(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) < 4$.

b) Dacă $x \in (-2,3)$ și $y \in (1,2)$, demonstrați că expresia $E(x,y)$ nu depinde de x și y.

Soluție:

a) $E(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3\sqrt{4-2\sqrt{3}} + 2\sqrt{21-12\sqrt{3}} - |\sqrt{3}-3|$
$E(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3|1-\sqrt{3}| + 2|2\sqrt{3}-3| - |\sqrt{3}-3|$ (1p)
$E(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3 + 4\sqrt{3} - 6 + \sqrt{3} - 3$
$E(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 8\sqrt{3} - 12$ (1p)
$8\sqrt{3} - 12 < 4$, $\sqrt{3} < 2$ (1p)

b) $E(x,y) = 3|1-y| + 2|x-3| - |2x-3y-3|$ (1p)
$x \in (-2,3) \rightarrow x - 3 < 0 \rightarrow |x-3| = 3 - x$ (0,5p)
$y \in (1,2) \rightarrow 1 - y < 0 \rightarrow |1-y| = y - 1$. (0,5p)
Justificare $2x - 3y - 3 < 0$ (1p)
$E(x,y) = 0$ (1p)

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

februarie – martie 2024

SUBIECTUL III

O piramidă patrulateră regulată are lungimea diagonalei bazei egală cu lungimea apotemei, iar distanța de la centrul bazei la o față laterală este egală cu $\frac{7}{2}cm$.
Arătați că unghiul $\hat{u}$ format de două fețe laterale opuse ale piramidei verifică: $30° < m(\hat{u}) < 45°$.

Soluție:

Daca $VABCD$ piramida patrulateră, $AB = 2l$, M mijlocul BC, O centrul bazei:

ON $\perp$VM , demonstrație că $ON \perp (VBC)$ (1p)

$ON = \frac{VO\cdot OM}{VM}$, de unde $l = \sqrt{14}$ și $AB = 2\sqrt{14}$ (2p)

$(VAD) \cap (VBC) = d, d \parallel AD, P$ mij $AD \Longrightarrow \sphericalangle\big((VAD),(VBC)\big) = \sphericalangle(VP, VM) = \sphericalangle PVM$ (2p)

Arată că $30° < m(\hat{u}) < 45°$ (folosind, eventual, o funcție trigonometrică) (2p)

SUBIECTUL IV

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și punctele M - mijlocul lui $[A'B']$, N - mijlocul lui $[A'D']$, Q - mijlocul lui $[DC]$. Notăm $\alpha = (MNQ)$.

a) Dacă dreapta $D'C'$ intersectează planul α în punctul T, demonstrați că $[A'T]$=$[MD']$.

b) Fie $\{P\} = DD' \cap \alpha$ și $\{S\} = BB' \cap \alpha$. Demonstrați că patrulaterul $PQSM$ este dreptunghi.

Soluție :

a) Cum $MN \cap D'C' = \{T\} \Longrightarrow \Delta MA'N \equiv \Delta TD'N$ (C.U), deci $TD' \equiv MA'$ (1p)
Deoarece $TD' \parallel MA'$, deducem că $A'M\, D'T$ paralelogram $\Rightarrow [A'T]$=$[MD']$ (1p)

b) Notăm cu R mijlocul lui $BC \Rightarrow QRMN$ paralelogram $\Rightarrow R \in \alpha$ (1p)
Dacă S' mijlocul lui DD' și P' mijlocul lui $BB' \Rightarrow M, N, P', S', Q, T$ coplanare, din α (1p)
Cum $\{P\} = DD' \cap \alpha$ și $\{S\} = BB' \cap \alpha \Rightarrow S'$ coincide cu S și P' coincide cu P (1p)
PM și QS sunt paralele și congruente, deci $PQSM$ este paralelogram (1p)
Cum $SP \equiv MQ \Rightarrow PQSM$ este dreptunghi (1p)