CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2025

BAREM – CLASA a V-a
proba de matematică

SUBIECTUL I

a) Să se efectueze:

$$5^{100}:[3\cdot 35^{42}:7^{42}\cdot 5^{56}+(5^{10}\cdot 5^{15})^{5}:(25^{5}\cdot 125^{5})^{5}\cdot 5^{98}+(4^{2025}:4^{2024}+1^{2025})^{90}\cdot 5^{8}].$$

b) Arătați că numărul $A=1023\cdot 1024+2^{30}-2^{20}$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Barem:

a) $5^{100}:[3\cdot 5^{42}\cdot 5^{56}+5^{75}:5^{75}\cdot 5^{98}+5^{90}\cdot 5^{8}]$........2p

$5^{100}:[3\cdot 5^{98}+5^{98}+5^{98}]=5^{100}:5^{99}=1$........2p

b) $A=1023\cdot 1024+2^{20}\cdot(2^{10}-1)$........1p

$A=1023\cdot 1024+2^{20}\cdot 1023$........1p

$A=1023\cdot(2^{10}+2^{20})=1023\cdot 2^{10}\cdot(1+2^{10})$........1p

$A=1023\cdot 1024\cdot 1025$........1p

Oficiu........2p

SUBIECTUL II

Determinați toate numerele naturale de 5 cifre, $\overline{abcde}$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\overline{de}$ este cub perfect;

b) $\overline{cd}$ este pătrat perfect;

c) $a\cdot b=\overline{de}-\overline{cd}$.

Barem:

Cuburi perfecte de două cifre: 27, 64

Caz 1) $\overline{de}=27 \Rightarrow \overline{cd}=\overline{c2}$ are ultima cifră 2 deci nu poate fi pătrat perfect

Caz 2) $\overline{de}=64 \Rightarrow \overline{cd}=\overline{c6}$

$\overline{cd}$ este pătrat perfect dacă $\overline{cd}$ este 16 sau 36

2.1) $\overline{cd}=16$

$64-16=48$ deci $a\cdot b=48 \Rightarrow a=6, b=8 \Rightarrow \overline{abcde}=68164$ sau $a=8, b=6 \Rightarrow \overline{abcde}=86164$

2.2) $\overline{cd}=36$

$64-36=28$ $deci\ ab=28 \Rightarrow a=4, b=7 \Rightarrow \overline{abcde}=47164$ sau $a=7, b=4 \Rightarrow \overline{abcde}=74164$

Oficiu 2p

SUBIECTUL III

Demonstrați că numărul $N = \underbrace{44\ldots4}_{\substack{2025\\ cifre}}\underbrace{22\ldots2}_{\substack{2025\\ cifre}}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

Barem:

Notăm $a = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{2025\, cifre}$. 2p

$N = 4 \cdot a \cdot 10^{2025} + 2 \cdot a = 2 \cdot a \cdot (2 \cdot 10^{2025} + 1)$..2p

$9 \cdot a + 1 = 10^{2025}$ 2p

$N = 2a \cdot [2 \cdot (9a + 1) + 1] = 2a(18a + 3) = 6a \cdot (6a + 1)$ 2p

Oficiu 2p

SUBIECTUL IV

Aflați cel mai mic și cel mai mare număr de forma $\overline{abcdef}$ care verifică relația

$$a \cdot \overline{ab} \cdot \overline{abc} = \overline{abcde} + 100 \cdot f,$$

unde a, b, c, d, e, f sunt cifre nenule.

Gazeta Matematică, ianuarie 2025.

Barem:

$a \cdot \overline{ab} \cdot \overline{abc} = \overline{abcde} + 100 \cdot f \Rightarrow a \cdot \overline{ab} \cdot \overline{abc} - 100 \cdot \overline{abc} = \overline{fde}$................**1p**

$0 < \overline{abc} \cdot \left(a \cdot \overline{ab} - 100\right) = \overline{de} + 100 \cdot f < 1000$..**1p**

Pentru $a \leq 2 \Rightarrow a \cdot \overline{ab} < 100$, ceea ce nu convine

Pentru $a \geq 4 \Rightarrow a \cdot \overline{ab} - 100 \geq 64 \Rightarrow \overline{fde} > 1000$, nu convine.....................**1p**

Deci a = 3...**1p**

$\overline{3bc} \cdot \left(3 \cdot \overline{3b} - 100\right) = \overline{fde}$

Pentru $b \leq 3 \Rightarrow 3 \cdot \overline{3b} < 100$, ceea ce nu convine

Pentru $b \geq 5 \Rightarrow 3 \cdot \overline{3b} - 100 \geq 5 \Rightarrow \overline{3bc} \cdot \left(3 \cdot \overline{3b} - 100\right) > 1000$, ceea ce nu convine **1p**

Deci b = 4 ....1p

Cel mai mic număr se obține pentru c = 1, $\overline{abcdef} = 341826$...**1p**

Cel mai mare număr se obține pentru c = 9, $\overline{abcdef} = 349986$..**1p**

Oficiu 2p

.