CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2025

BAREM
proba de matematică
Clasa a VII-a

SUBIECTUL I

a) Determinați toate perechile de numere raționale (a, b) care verifică egalitatea:

$$\sqrt{2(a+1)^2} - 2\sqrt{2} = |b+1|\sqrt{3} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|.$$

b) Determinați aria dreptunghiului *ABCD* cu *AB*= *x cm* și *BC*= *y cm* astfel încât:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 61} + \sqrt{y^2 - 6y + 25} \leq 10.$$

Soluție:

a) $|a+1| \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = |b+1| \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$(|a+1| - 3) \cdot \sqrt{2} = (|b+1| - 1) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$ **2p**

$|a+1| - 3 = 0 \Rightarrow |a+1| = 3$

si $|b+1| - 1 = 0 \Rightarrow |b+1| = 1$

Obținem perechile: (2, 0) , (-4, 0), (2, -2), (-4, -2) **2p**

$\sqrt{(x-5)^2 + 36} + \sqrt{(y-3)^2 + 16} \leq 10$ **2p**

b) $\sqrt{(x-5)^2 + 36} \geq 6$, $\sqrt{(y-3)^2 + 16} \geq 4$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$ și

$\sqrt{(x-5)^2 + 36} + \sqrt{(y-3)^2 + 16} \geq 10$ **1p**

Deci, $x = 5$, $y = 3$ și $A = 15\ cm^2$ **1p**

Oficiu **2p**

SUBIECTUL II

a) Rezolvati în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{5} + \cdots + \frac{x+2025}{2027} = 2025.$$

b) Demonstrați că $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{2025}] - 2$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{x+1}{3} - 1 + \frac{x+2}{4} - 1 + \frac{x+3}{5} - 1 + \cdots + \frac{x+2025}{2027} - 1 = 0$ **1p**

$\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{5} + \cdots + \frac{x-2}{2027} = 0$ **1p**

$(x-2)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2027}\right) = 0$ **1p**

Deoarece $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2027} \neq 0 \Rightarrow x - 2 = 0, S = \{2\}$ **1p**

b) $[\sqrt{n^2}] = [\sqrt{n^2+1}] = \cdots = [\sqrt{n^2+2n}] = n, n \in \mathbb{N}$, fiind $2n$+1 astfel de termeni **1p**

$\sqrt{2025} = 45, S = 1(2\cdot 1 + 1) + 2(2\cdot 2 + 1) + 44(2\cdot 44 + 1) + 45 - 2$ **1p**

$S = 2(1^2 + 2^2 + \cdots. + 44^2) + (1 + 2 + \cdots + 44) + 45 - 2$ **1p**

Ultima cifră a lui S este 0+0+5-2=3, deci S nu este pătrat perfect **1p**

Oficiu **2p**

CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2025

SUBIECTUL III

În ΔABC bisectoarea AE intersectează mediana BF în punctul G, unde $E \in BC$ și $F \in AC$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{BG}{GF} \cdot \frac{CE}{BE} = 2^a$.

b) Dacă ΔAGF și ΔBGE sunt echivalente, demonstrați că G este centrul de greutate al ΔABC.

Soluție:

a) AE- bisectoare $\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$ **1p**

AG- bisectoare $\Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{AB}{\frac{AC}{2}} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{2AB}{AC}$ **1p**

$\frac{BG}{GF} \cdot \frac{CE}{BE} = \frac{2AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow a = 1$ **2p**

b) $A_{\Delta BEG} = A_{\Delta BEA} - A_{\Delta BGA}$

$A_{\Delta AGF} = A_{\Delta BFA} - A_{\Delta BGA} \Rightarrow A_{\Delta BEA} = A_{\Delta AFB}$ **1p**

Fie $EM \perp AB, FN \perp AB$.

$\Rightarrow \frac{BA \cdot EM}{2} = \frac{BA \cdot FN}{2} \Rightarrow EM = FN$ **1p**

$EM \parallel FN \Rightarrow EF \parallel AB$, F –mijlocul segmentului AC **1p**

Deci, E este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow G$ este centrul de greutate al ΔABC **1p**

Oficiu **2p**

SUBIECTUL IV

Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare, iar paralela la baze dusă prin punctul de intersecție al diagonalelor intersectează laturile neparalele BC și AD în punctele P, respectiv R. Punctul Q este simetricul punctului P față de mijlocul segmentului BC. Arătați că:

a) $QR = AD$;
b) $QR \perp AD$.

Soluție:

a) Se arată că $OR = OP \Rightarrow O$ mijlocul lui PR **1p**

Fie M mijlocul lui $BC \Rightarrow OM$ linie mijlocie în $\Delta PRQ \Rightarrow OM = \frac{1}{2}RQ$ **1p**

ΔBOC ($\sphericalangle = 90^0$), OM- mediană $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC =$ **1p**

$ABCD$ trapez isoscel, deci $BC = AD \Rightarrow RQ = AD$ **1p**

b) Fie $\{T\} = MO \cap AD$. Cum ΔOMB – isoscel $\Rightarrow \sphericalangle MBO = \sphericalangle MOB = \sphericalangle DOT$ **1p**

În ΔBOC, $\sphericalangle OCB + \sphericalangle OBC = 90^0$ **1p**

Cum $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA \Rightarrow \sphericalangle ADO$ și $\sphericalangle DOT$ sunt complementare **1p**

În concuzie $AD \perp MT$ și cum $OM \,//\, RQ$, deducem $AD \perp RQ$ **1p**

Oficiu **2p**