CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR
martie 2025

Barem
proba de matematică
Clasa a VIII-a

1. a) Determinați numerele reale *x* și *y* pentru care $5x^2+y^2+20=2x+3xy+6y$.
   b) Calculați volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile *a*, *b*, și *c* știind că $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(b+\frac{4}{b}\right)\left(c+\frac{8}{c}\right)=64$.

Rezolvare: a) Înmulțim relația cu 2 și obținem: $10x^2+2y^2+40=4x+6xy+12y$, de unde:
$(x-2)^2+(y-6)^2+(3x-y)^2=0$ 2p

$x=2, y=6$ și verifică $y=3x$. 2p

b) Din inegalitatea mediilor știm că $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}, x\geq 0, y\geq 0$, agalitatea are loc pentru $x=y$.

Cum *a*, *b*, și *c* sunt numere pozitive, $a+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{2}, b+\frac{4}{b}\geq 4, c+\frac{8}{c}\geq 4\sqrt{2}$. 1p

Prin înmulțire obținem $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(b+\frac{4}{b}\right)\left(c+\frac{8}{c}\right)\geq 64$.

Rezultă că $a=\frac{2}{a}, b=\frac{4}{b}, c=\frac{8}{c}$ 2p

Obținem că $a=\sqrt{2}, b=2, c=2\sqrt{2}\Rightarrow V=8\,\text{u}^3$. 1p

2 puncte din oficiu.

2. a) Arătați că: i) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{2023\cdot 2025}\in\left\{x\in\mathbb{R}-\{1\}/\frac{2-x}{x-1}\leq -1\right\}$;
   ii) $\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-2025^2\right|\geq\left|x-2025\cdot 1013\right|$, oricare ar fi numărul real *x*.
   b) Fie fracția $F(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$, unde *a* este un număr real nenul dat. Dacă *M* și *m* sunt cea mai mare, respectiv cea mai mică valoare pe care le poate lua fracția *F*, arătați că $M-m=|a|$.

Rezolvare: a) i) $\frac{2-x}{x-1}\leq -1\Leftrightarrow\frac{2-x}{x-1}+1\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}\leq 0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$ 1p

$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{2023\cdot 2025}=\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2025-2023}{2023\cdot 2025}=1-\frac{1}{2025}<1$ 1p

ii) $\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-2025^2\right|\geq\left|\left(x-1^2\right)-\left(x-2^2\right)+\left(x-3^2\right)-\ldots+\left(x-2025^2\right)\right|$ 1p

$=\left|x-1^2-x+2^2+x-3^2-\ldots+x-2025^2\right|=\left|x-\left(1^2+3^2+5^2+\ldots+2025^2\right)+\left(2^2+4^2+\ldots+2024^2\right)\right|$

$=\left|x-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+2025^2\right)+2\left(2^2+4^2+\ldots+2024^2\right)\right|$

$=\left|x-\frac{2025\cdot 2026\cdot 4051}{6}+8\cdot\frac{1012\cdot 1013\cdot 2025}{6}\right|=\left|x-2025\cdot 1013\right|$. 1p

b) Dacă $a \neq 0, F(x) = 1 + \frac{ax}{x^2+1} = 1 + \frac{a}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$ 1p

Arătăm că $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$. 1p

Dacă $a > 0$ și înmulțim relația cu $\frac{a}{2}$ obținem $m = 1 - \frac{a}{2} \leq F(x) \leq 1 + \frac{a}{2} = M \Rightarrow M - m = a = |a|$. 1p

Dacă $a < 0$ și înmulțim relația cu $\frac{a}{2}$ obținem $m = 1 + \frac{a}{2} \leq F(x) \leq 1 - \frac{a}{2} = M \Rightarrow M - m = -a = |a|$ 1p.

2 puncte din oficiu.

3. Pe planul triunghiului echilateral *ABC*, de latură *a*, se ridică de aceeași parte perpendicularele *AA'* și *BB'*, $AA' = \frac{3a}{2}, BB' = a$. Dacă $(A'B'C) \cap AB = \{P\}$ atunci:
   a) calculați *CP;*
   b) determinați tangenta unghiului plan al diedrului dintre planele (*A'B'C*) și (*ABC*);
   c) aflați distanța de la punctul *B* la planul (*A'B'C*).

Rezolvare: a) $AA' \| BB' \Rightarrow AA'$ și BB' coplanare, $A'B' \cap AB = \{P\}$. Aplicăm TFA în triunghiul *PAA'*

$\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow PB = 2a$. Obținem $CP = a\sqrt{7}$. 2p

b) Ducem $BQ \perp CP \Rightarrow B'Q \perp CP$ și găsim unghiul dintre plane $\sphericalangle B'QB$. 1p

$BQ = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow tg \sphericalangle B'QB = \frac{\sqrt{21}}{3}$. 2p

c) Arătăm că $(A'B'C) \perp (BB'Q)$. 1p

Construim distanța $BT \perp B'Q \Rightarrow BT \perp (A'B'C)$. 1p

$BT = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. 1p

2 puncte din oficiu.

4. Fie *ABCDA'B'C'D'* prismă patrulateră regulată. Arătați că *ABCDA'B'C'D'* este cub dacă și numai dacă $A'C \perp AD'$.

Rezolvare: „$\Rightarrow$" *ABCDA'B'C'D'* cub $\Rightarrow AD' \perp A'D$ 1p

$\left.\begin{array}{l} CD \perp (ADD') \\ AD' \subset (ADD') \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp AD'$ 1p

Obținem astfel că $AD' \perp (A'DC)$. 1p

Cum $A'C \subset (A'DC)$, avem că $A'C \perp AD'$ 1p

“$\Leftarrow$”

$\left.\begin{array}{l} A'C \perp AD' \\ CD \perp D'A \end{array}\right\}$ 1p

$\Rightarrow AD' \perp (A'CD), A'D \subset (A'CD)$ 1p

$\Rightarrow AD' \perp A'D$ 1p

$\Rightarrow$*ADD'A'* pătrat, deci *ABCDA'B'C'D'* este cub. 1p

2 puncte din oficiu.