CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2025

BAREM
proba de matematică – individual
clasa a IX-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Arătați că, pentru orice $a,b,c\in(0,\infty)$, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

* * *

Soluție.

Notăm $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{c},\ z=\frac{c}{a}$, rezultă că $x,y,z>0$ și $xyz=1$.

Apoi avem $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{xy+1}{y+1}-x=\frac{1-x}{1+y}$ și analoagele.

.... **8 puncte**

Inegalitatea din enunț se scrie echivalent:

$$\frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{z+1}+\frac{z-1}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(z+1)+(y^2-1)(x+1)+(z^2-1)(y+1)\geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}x^2z+\sum_{cyc}x^2\geq\sum_{cyc}x+3,$$

pentru orice numere reale pozitive x,y,z, cu $xyz=1$. (1)

.... **10 puncte**

Din inegalitatea mediilor obținem $\sum_{cyc}x^2z\geq 3xyz=3$ și $\sum_{cyc}x^2\geq\frac{\left(\sum_{cyc}x\right)^2}{3}=\frac{\sum_{cyc}x}{3}\cdot\sum_{cyc}x\geq\sum_{cyc}x$, deci inegalitatea (1) este adevărată.

.... **7 puncte**

Subiectul 2 (25 puncte)

Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(x)\cdot f(y)=5f(x+y)+4xy$, pentru orice numere reale x,y.

Mihaela Berindeanu, București

Soluție.

Înmulțim relația din enunț cu $f(z)$ și obținem:

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=5f(x+y)\cdot f(z)+4xy\cdot f(z),\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Din ipoteză avem $f(x+y)\cdot f(z)=5f(x+y+z)+4(x+y)z$ și împreună cu relația precedentă obținem $f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=25f(x+y+z)+20(x+y)z+4xy\cdot f(z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)-25f(x+y+z)=20(x+y)z+4xy\cdot f(z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

.... **10 puncte**

Cum membrul stâng este simetric în variabilele x,y,z, rezultă că și membrul drept are aceeași proprietate, adică $20(x+y)z+4xy\cdot f(z)=20(y+z)x+4yz\cdot f(x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu $5yz+xy\cdot f(z)=5yx+yz\cdot f(x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

.... **5 puncte**

Considerăm $x=y=1$ și obținem $f(z)=(f(1)-5)z+5,\ \forall z\in\mathbb{R}$. Notăm $f(1)-5=a$ și înlocuind în enunțul problemei se obține $a^2=4\Rightarrow a\in\{2,-2\}$. Funcțiile cerute sunt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+5$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+5$.

.... **10 puncte**

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie A și B două mulțimi finite, formate din numere naturale nenule, cu proprietatea că

$$|A\cup B|\cdot|A\cap B|=\sum_{x\in A\cup B}x,$$

unde prin $|M|$ am notat cardinalul mulțimii finite M.

a) Arătați că $|A\cap B|>|A\setminus B|+|B\setminus A|$.

b) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există mulțimi A și B cu proprietatea din enunț astfel încât $|A\cup B|=n$.

Cristi Săvescu, Focșani

Soluție.

a) Deoarece $A,B\subseteq\mathbb{N}^*$, avem $\sum_{x\in A\cup B}x\geq 1+2+3+\ldots+|A\cup B|=\frac{|A\cup B|\cdot(|A\cup B|+1)}{2}$. Atunci relația din ipoteză conduce la $|A\cap B|\geq\frac{|A\cup B|+1}{2}$, de unde obținem imediat faptul că $2\cdot|A\cap B|\geq|A\setminus B|+|B\setminus A|+|A\cap B|+1$. Rezultă $|A\cap B|\geq|A\setminus B|+|B\setminus A|+1$, de unde deducem inegalitatea cerută.

.... **9 puncte**

b) Pentru $n=1$, considerăm $A=B=\{1\}$, iar pentru n impar, $n\geq 3$, considerăm $A=\left\{1,2,\ldots,\frac{n+3}{2}\right\}$ și $B=\{2,3,\ldots,n\}$. Cum $\frac{n+3}{2}\leq n$, avem $A\cup B=\{1,2,\ldots,n\}$ și $A\cap B=\left\{2,3,\ldots,\frac{n+3}{2}\right\}$, deci $|A\cup B|=n$ și $|A\cap B|=\frac{n+1}{2}$. Egalitatea din ipoteză devine $n\cdot\frac{n+1}{2}=1+2+\ldots+n$ și este evident adevărată.

.... **8 puncte**

Pentru $n=2$, considerăm $A=B=\{1,3\}$. Pentru n par, $n\geq 4$, considerăm $A=\left\{1,2,\ldots,\frac{n+2}{2}\right\}$ și $B=\left\{1,2,\ldots,n-1,\frac{3n}{2}\right\}$. Cum $\frac{n+2}{2}\leq n-1$, avem $A\subseteq B$, deci $A\cup B=B$ și $A\cap B=A$, prin urmare $|A\cup B|=|B|=n$ și $|A\cap B|=|A|=\frac{n+2}{2}$. Egalitatea din ipoteză devine $n\cdot\frac{n+2}{2}=1+2+\ldots+(n-1)+\frac{3n}{2}$, adică $\frac{n(n+2)}{2}=\frac{(n-1)\cdot n}{2}+\frac{3n}{2}$ și este evident adevărată.

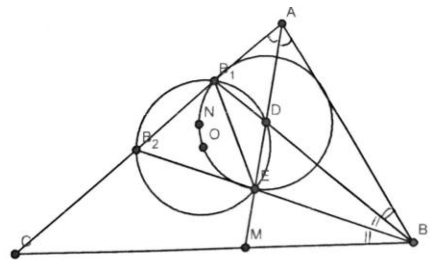
.... 9 puncte

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie B_1 și B_2 două puncte pe latura AC a triunghiului $ABC, B_1\in(B_2A)$ astfel încât $\sphericalangle ABB_1=\sphericalangle B_1BB_2=\sphericalangle B_2BC$, iar D și E punctele de intersecție dintre bisectoarea unghiului A cu dreptele BB_1, respectiv BB_2. Dacă B_1B_2ED este patrulater inscriptibil, arătați că punctele B_1,H,O,I și E sunt conciclice, unde H,O,I sunt ortocentrul, centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului înscris în triunghiul B_1B_2E.

Cătălin Barbu și *Lucian Lazăr,* Bacău

Soluție.



Fie M intersecția bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$ cu BC, notăm cu α,β măsurile unghiurilor $\sphericalangle CAM$ și $\sphericalangle ABB_1$. Avem: $m(\sphericalangle MDB)=\alpha+\beta$, $m(\sphericalangle B_2EA)=\alpha+2\beta$ și $m(\sphericalangle B_2B_1B)=2\alpha+\beta$.
Cum B_1B_2ED este patrulater inscriptibil, avem $m(\sphericalangle B_2EA)+m(\sphericalangle B_2B_1B)=180^\circ$, sau $\alpha+\beta=60^\circ$, de unde $m(\sphericalangle AB_2B)=60^\circ$.

.... 9 puncte

Avem: $m(\sphericalangle B_1HE)=180^\circ-m(\sphericalangle B_1B_2E)=120^\circ$ și $m(\sphericalangle B_1OE)=2\cdot m(\sphericalangle B_1B_2E)=120^0$, deci $\sphericalangle B_1HE=\sphericalangle B_1OE$, adică punctele B_1,H,O,E sunt conciclice (1)

.... 8 puncte

În triunghiul B_1IE avem: $m(\sphericalangle B_1IE)=180^0-m(\sphericalangle IEB_1)-m(\sphericalangle IB_1E)=120^0$, de unde $\sphericalangle B_1OE=\sphericalangle B_1IE$, adică B_1,I,O,E sunt conciclice (2). Din relațiile (1) și (2) deducem concluzia.

.... 8 puncte