MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

CN PIATRA NEAMȚ COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2025

BAREM DE NOTARE
Clasa a X-a
proba de matematică

1. Arătați că există $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=3i$.

Soluție:

Înmulțind relația dată cu z_3 obținem ecuația de gradul doi în z_3: 15p

$\frac{1}{z_1}\cdot z_3{}^2+\left(\frac{z_1}{z_2}-3i\right)\cdot z_3+z_2=0$ pentru z_1 și z_2 fixate

care are soluții în $\mathbb{C}^*$ ……………………………………………………………………………...10p

2 . a)(10 p) Să se arate că $(a+b)\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq b\lg a+a\lg b,$ **pentru orice** $a,b\in(1,\infty)$ **.**

b)(15 p) Fie $a,b\in(0,1)$ **, cu** $a^2+b^2=1.$ **Să se arate că** $a\lg a+b\lg b+(a+b)\lg(a+b)\leq 0$ **.**

Soluție: a) Din inegalitatea mediilor rezultă $(a+b)\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq(a+b)\lg\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{a+b}{2}(\lg a+\lg b)$

....5p

Este suficient să demonstrăm că $\frac{a+b}{2}(\lg a+\lg b)\geq b\lg a+a\lg b$, inegalitate echivalentă cu $(a-b)(\lg a-\lg b)\geq 0$,adevărat...5p

b) Inegalitatea se rescrie:

$\frac{a}{a+b}\lg a+\frac{b}{a+b}\lg b\leq-\lg(a+b)\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}\lg a+\frac{b}{a+b}\lg b\leq\lg\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$ (1)...5p

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\lg x$, care este funcție concavă. Atunci, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$ și $\alpha,\beta\in[0,1]$, cu $\alpha+\beta=1$, rezultă $f(\alpha x+\beta y)\geq\alpha f(x)+\beta f(y)$. Pentru $x=a, y=b, \alpha=\frac{a}{a+b}, \beta=\frac{b}{a+b}$ obținem inegalitatea (1), care este echivalentă cu inegalitatea din cerință...10p

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 2$ **ecuația** $2^{n-1}(z^n+1)=(z+1)^n$ **are toate rădăcinile de acelați modul.**

Soluție: Observăm că $z=1$ este soluție și pentru n număr impar avem $z=-1$ soluție, ambele având modulul egal cu 1. .... 5p
Vom arăta că toate rădăcinile au modulul 1.

Notăm $|z|=r>0$, deci $\bar{z}=\dfrac{r^2}{z}$ și conjugăm relația din ipoteză, obținând: $2^{n-1}\left(\bar{z}^n+1\right)=\left(\bar{z}+1\right)^n \Leftrightarrow 2^{n-1}\left(\left(\dfrac{r^2}{z}\right)^n+1\right)=\left(\dfrac{r}{z}+1\right)^n \Leftrightarrow 2^{n-1}\left(r^{2n}+z^n\right)=\left(r^2+z\right)^n$. Scădem relația din ipoteză și rezultă

$$2^{n-1}\left(r^{2n}-1\right)=\left(r^2+z\right)^n-(1+z)^n \Rightarrow 2^{n-1}\left(r^{2n}-1\right)=\left(r^2-1\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(r^2+z\right)^{n-k}(1+z)^{k-1}\right)$$ 10p

Presupunem prin reducere la absurd că $r\neq 1$ și atunci $\dfrac{r^{2n}-1}{r^2-1}>0$ și obținem:

$$2^{n-1}\frac{\left(r^{2n}-1\right)}{\left(r^2-1\right)}=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(r^2+z\right)^{n-k}(1+z)^{k-1}\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left(r^2+r\right)^{n-k}\cdot(1+r)^{k-1}=(1+r)^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}r^{n-k}=(1+r)^{n-1}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

de unde rezultă că $2^{n-1}\left(r^n+1\right)\leq(r+1)^n$, contradicție. Se poate demonstra folosind metoda inducției matematice că $2^{n-1}\left(r^n+1\right)>(r+1)^n, \forall n\geq 2, r\in(0,1)\cup(1,\infty)$.
În concluzie $r=1$ ....10 p

4. Spunem că o funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ are proprietatea P dacă

$f\left((f(x))^2+f(y)\right)=xf(x)+f(y)$, **pentru orice** $x,y\in\mathbb{Z}$.

a) (5p) Dați exemplu de o funcție f cu proprietatea P pentru care $0<f(2025)<2026$.

b) (10p)Există funcții f cu proprietateea P, pentru care $f(2025)\geq 2026$? Justificați răspunsul!

<u>Soluție:</u>

a) Funcția identică $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x$, are proprietatea P și $f(2025)=2025\in(0,2026)$. ……….……..5p

b) Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ o funcție care are proprietatea P. Făcând $x=y=-1$ în egalitatea din enunț, obținem
$f\left((f(-1))^2+f(-1)\right)=0$, deci $0\in \mathrm{Im}(f)$

Apoi, pentru $f(x)=0$ obținem $f\left(f(y)\right)=f(y)$, pentru orice $y\in\mathbb{Z}$, prin urmare
$f(z)=z$, pentru orice $z\in \mathrm{Im}(f)$, (1)……………………………………………………………………….5p

Aplicăm f pe relația din ipoteză și ținând cont de (1) avem

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=f\left(f\left((f(x))^2+f(y)\right)\right)=f\left((f(x))^2+f(y)\right)=xf(x)+f(y)$$ ……………………5p

În egalitatea $f\left(xf(x)+f(y)\right)=xf(x)+f(y)$, care are loc pentru $x,y\in\mathbb{Z}$, punem $f(x)$ în loc de x și ținând cont din nou de relația (1), obținem

$f\left((f(x))^2+f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2+f(y)$ …………………………………………………………...………...5p

Egalăm cu relația din ipoteză și obținem $\left(f\left(x\right)\right)^2 = xf\left(x\right)$, de unde $f(x)\left(f(x)-x\right)=0.$ Deducem că $f(x)\in\left\{0,x\right\}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, de unde rezultă că $\left|f(x)\right|\le\left|x\right|$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$.

Pentru $x=2025$ obținem $\left|f(2025)\right|\le 2025$, deci nu există funcții f cu proprietatea P, pentru care $f(2025)\ge 2026$. ……..……………………………………………………………………………………..5p