CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2025

BAREM
proba de matematică – individual
clasa a XI-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, cu $(AB - BA)^2 = O_3$. Demonstrați că:

$$\det(AB + BA) = \det(2AB).$$

Soluție:

Din relația lui Sylvester $rang(AB - BA)^2 \geq 2rang(AB - BA) - 3$, de unde obținem că $rang(AB - BA) \leq 1$..5p

Deducem că funcția polinomială $f(x) = \det[BA + x(AB - BA)]$ are gradul maxim 1, deci există $a, b \in \mathbb{C}, a.î. f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{C}$..5p

Pentru $x = 0$ obținem $b = \det(BA)$, pentru $x = 1$ obținem $a = \det(AB) - \det(BA)$.

Pentru $x = \frac{1}{2}$ obținem $f\left(\frac{1}{2}\right) = \det\left[BA + \frac{1}{2}(AB - BA)\right] = \frac{1}{2}(\det(AB) - \det(BA)) + \det(BA)$....5p

Adică

$\det\left[\frac{1}{2}(AB + BA)\right] = \frac{1}{2}[\det(AB) + \det(BA)] \Longrightarrow \frac{1}{8}\det(AB + BA) = \det(AB) \Longrightarrow \det(AB + BA) = 8\det(AB) \Longrightarrow \det(AB + BA) = \det(2AB)$

....10p

Subiectul 2 (25 puncte)

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstrați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

a) există $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = BC$ și $CB = O_n$;

b) $A^2 = O_n$.

Sorin Rădulescu, Vladimir Cerbu

Soluție:

$a) \Rightarrow b)$ $A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C = B \cdot O_n \cdot C = O_n$ 5p

$b) \Rightarrow a)$ Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = O_n$. Dacă $r = \text{rang}\, A$, atunci există matricile inversabile

$P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = P \cdot S \cdot Q$, unde $S = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$. 10p

$A^2 = O_n \Rightarrow PSQ \cdot PSQ = O_n \Rightarrow SQ \cdot PS = O_n$ (am simplificat la stânga cu P și la dreapta cu Q)

Deoarece $S^2 = S$ putem scrie $A = PS \cdot SQ$.

Luăm $B = PS$ și $C = SQ$. Avem $A = BC$ și $CB = SQ \cdot PS = O_n$ 10p

Subiectul 3 (25 puncte)

Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$5f(3x+1) - 2f(x-1) = 13x + 10, \forall x \in \mathbb{R}$$

Soluție:

Căutăm soluții de forma $f(x) = ax + b$ și obținem soluția $f_1(x) = x + 1$…………………………..5p

Scriind $f(x) = f_1(x) + g(x)$ și înlocuind în relație obținem $5g(3x+1) = 2g(x-1), x \in \mathbb{R}$, adică $5g(3(x+1)-2) = 2g(x+1-2)$. Înlocuind $x + 1 = t$ obținem $5g(3t-2) = 2g(t-2)$……5p

Notăm $g(t-2) = h(t)$, de unde $5h(3t) = 2h(t) \Rightarrow h(x) = \frac{2}{5}h\left(\frac{x}{3}\right), \forall x \in \mathbb{R}$.…………………5p

Inductiv avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, h(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^n h\left(\frac{x}{3^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. ………………………………5p

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ rezultă $h(x) = 0 \cdot h(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Obținem $f(x) = x + 1$ este singura funcție care verifică relația din ipoteză………………………………………………………..5p

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie șirul cu termeni strict pozitivi $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea $a_{n+1}^2 = (n+1)(a_n - a_{n+1}) \quad \forall n \geq 1$ și

$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} ... + \frac{1}{2n} + \ln n, \quad n \geq 1$. Verificați dacă șirul $x_n = a_n \cdot b_n, \quad n \geq 1$ este convergent.

Soluție:

$a_n - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}^2}{n+1} > 0 \quad \Rightarrow a_n$ șir monoton strict descrescător. Cum $a_n > 0$ rezultă $(a_n)_{n\geq 1}$ mărginit, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}, \quad l \geq 0$ 5p

Dacă $l > 0$, cum $a_{n+1} \geq l$ rezultă $\frac{a_{n+1}^2}{n+1} \geq \frac{l^2}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n - a_{n+1} \geq \frac{l^2}{n+1}$. Rezultă

$a_1 - a_{n+1} \geq l^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)$

Cum $l > 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right) = \infty$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (Fals). Deci $l = 0$ ……………………..10p

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{a_{n+1}^2}{(n+1)\cdot a_n \cdot a_{n+1}}} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} + (n+1)\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\ln\frac{n+1}{n}$ 8p

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) = 1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ deci x_n este convergent....................................2p