CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2025

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE – clasa a XII-a
proba de matematică

1.Să se arate că $\exists c \in [-1,1]$ astfel încât $\int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi x}{1-a^x+a^{2x}} dx = \frac{a^c \cdot \cos \pi c}{1-a^c+a^{2c}}$, $a>0, a \neq 1.$

(profesor Marian Ursărescu)

Soluție

$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi x}{1-a^x+a^{2x}} dx \qquad J = \int_{-1}^{1} \frac{a^{2x} \cos \pi x}{1-a^x+a^{2x}} dx$

$x=-t \Rightarrow dx=-dt$

$x=-1 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=-1$ **(5p)**

$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi t}{1-a^{-t}+a^{-2t}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{a^{2t} \cos \pi t}{a^{2t}-a^t+1} dt = J$ **(10p)**

$I+J = \int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi x\left(a^{2x}+1\right)}{a^{2x}-a^x+1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos \pi x\left(a^{2x}-a^x+1+a^x\right)}{a^{2x}-a^x+1} dx = \int_{-1}^{1} \cos \pi x dx + \int_{-1}^{1} \frac{a^x \cos \pi x}{a^{2x}-a^x+1} dx =$

$= \left.\frac{\sin \pi x}{\pi}\right|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{a^x \cos \pi x}{a^{2x}-a^x+1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{a^x \cos \pi x}{a^{2x}-a^x+1} dx.\ \ I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{a^x \cos \pi x}{a^{2x}-a^x+1} dx.$ **(10p)**

Aplicăm teorema de medie $\Rightarrow \exists c \in [-1,1]$ astfel încât

$$\int_{-1}^{1} \frac{a^x \cos \pi x}{a^{2x}-a^x+1} dx = 2\frac{a^c \cos \pi c}{a^{2c}-a^c+1} \Rightarrow I = \frac{a^c \cos \pi c}{a^{2c}-a^c+1}.$$ **(5p)**

2. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se arate că dacă ecuația $x+x+x+x=\hat{1}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_n$ atunci ecuația $x+x=\hat{1}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_n$.

(GM)

<u>Soluție</u>

Presupunem că există $a \in \mathbb{N}$ cu $\hat{a}+\hat{a}=\hat{1}$. Atunci n divide $2a-1$, deci n este impar. **(10p)**
Cum $(4,n)=1$, rezultă că $\hat{4}$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_n$, deci există $x \in \mathbb{Z}_n$ cu $\hat{4}x=\hat{1} \Rightarrow x+x+x+x=\hat{1}$, fals. **(15p)**

3. Determinați funcțiile integrabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$\int_0^x f(t)\,dt=\left(f(x)\right)^{2025}+f(x),\ \forall x\in[0,1].$$

(profesor Mihai Piticari, profesor Vladimir Cerbu)

Soluție

Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Funcția F este continuă și $F(0)=0$.

Considerând funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^{2025}+x$, relația din ipoteză devine $F=g\circ f$.

Evident funcția g este bijectivă, prin urmare inversabilă, deci $f=g^{-1}\circ F$. Deoarece funcțiile g^{-1} și F sunt continue deducem că funcția f este continuă, iar de aici obținem că funcția F este derivabilă și $F'=f$. **(7p)**

Deoarece funcția F este continuă pe $[0,1]$ rezultă că F este mărginită și își atinge marginile. Dacă notăm $m=\inf\limits_{x\in[0,1]}F(x)$ și $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}F(x)$, urmează că există $a,b\in[0,1]$ astfel încât $M=F(a)$ și $m=F(b)$.

Ținând cont că $F(0)=0$ rezultă că $m\le 0\le M$. **(8p)**

Presupunem că $M>0$. Dacă maximul M este atins în interiorul intervalului $[0,1]$, adică $a\in(0,1)$, conform teoremei lui Fermat rezultă că $f(a)=0$. Din ipoteză obținem $F(a)=\left(f(a)\right)^{2025}+f(a)=0$, adică $M=0$, absurd! Urmează că M este atins în 1, adică $M=F(1)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției F pe intervalul $[0,1]$ deducem că există $c\in(0,1)$ astfel încât $F(1)-F(0)=F'(c)(1-0)$, adică $M=f(c)$. Pentru $x=c$ în relația din ipoteză obținem $F(c)=M^{2025}+M$. Cum $M>0$ rezultă $F(c)>M=\sup\limits_{x\in[0,1]}F(x)$, absurd! Prin urmare $M=0$.

Analog se demonstrează că $m=0$ și atunci $F(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$, prin urmare $f(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$. **(10p)**

4. Fie n un număr natural liber de pătrate şi G un grup neabelian de ordinul n. Demonstraţi că există două elemente din G, de acelaşi ordin, care nu comută.

(***)

<u>Soluție</u>

Presupunem că orice două elemente ale grupului care au acelaşi ordin comută. Pentru fiecare factor prim p al lui n, fie $Hp = \{x \in G \mid x^p = e\}$. Deci Hp este parte stabilă şi deoarece este finită, deducem că Hp este subgrup abelian al lui G. **(5p)**

Fie p, q doi factori primi distincţi ai lui n şi $x \in Hp$, $y \in Hq$. Fie $a = xyx^{-1}y^{-1}$. Avem atunci $(xyx^{-1})^q = xy^qx^{-1} = xx^{-1} = e$, deci $xyx^{-1} \in H_q$ **(5p)**

şi cum $y^{-1} \in H_q$ deducem $a \in Hq$. Analog se arată că $a \in Hp$. Aşadar avem

$a \in Hp \cap Hq = \{e\}$ de unde $xy = yx$. **(5p)**

Fie $n = p_1p_2 \dots p_k$ unde p_i sunt factorii primi distincţi ai lui n. Din Teorema lui Cauchy, rezultă că există elementele $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ care au respectiv ordinele $p_1, p_2, \dots, p_k$. Deoarece elementele $a_1, a_2, \dots, a_k$ comută două câte două, deducem că ordinul lui $a_1a_2 \dots a_k$ este exact n, deci G ar fi ciclic, contrazicere cu faptul că G nu e abelian. **(10p)**