CONCURSUL PROSOFT@NT–JUNIOR

martie 2025

SUBIECTE
proba de matematică
Clasa a VIII-a

1. a) Determinați numerele reale *x* și *y* pentru care $5x^2+y^2+20=2x+3xy+6y$.

   b) Calculați volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile *a*, *b*, și *c* știind că $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(b+\frac{4}{b}\right)\left(c+\frac{8}{c}\right)=64$.

2. a) Arătați că: i) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{2023\cdot 2025}\in\left\{x\in\mathbb{R}-\{1\}\,/\,\frac{2-x}{x-1}\leq -1\right\}$;

   ii) $\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-2025^2\right|\geq\left|x-2025\cdot 1013\right|$, oricare ar fi numărul real *x*.

   b) Fie fracția $F(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$, unde *a* este un număr real nenul dat. Dacă *M* și *m* sunt cea mai mare, respectiv cea mai mică valoare pe care le poate lua fracția *F(x)*, arătați că $M-m=|a|$.

3. Pe planul triunghiului echilateral *ABC*, de latură *a*, se ridică de aceeași parte perpendicularele *AA'* și *BB'*, $AA'=\frac{3a}{2}, BB'=a$. Dacă $(A'B'C)\cap AB=\{P\}$ atunci:

   a) calculați *CP;*

   b) determinați tangenta unghiului plan al diedrului dintre planele (*A'B'C*) și (*ABC*);

   c) aflați distanța de la punctul *B* la planul (*A'B'C*).

4. Fie *ABCDA'B'C'D'* prismă patrulateră regulată. Arătați că *ABCDA'B'C'D'* este cub dacă și numai dacă $A'C\perp AD'$.

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.