MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

CNI PIATRA NEAMȚ COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2025

SUBIECTE
proba de matematică – individual
clasa a IX-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Arătați că, pentru orice $a,b,c \in (0,\infty)$, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

Subiectul 2 (25 puncte)

Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(x)\cdot f(y)=5f(x+y)+4xy,$$

pentru orice numere reale x, y.

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie A și B două mulțimi finite, formate din numere naturale nenule, cu proprietatea că

$$|A\cup B|\cdot|A\cap B|=\sum_{x\in A\cup B} x,$$

unde prin $|M|$ am notat cardinalul mulțimii finite M.

a) Arătați că $|A\cap B| > |A\setminus B| + |B\setminus A|$.

b) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există mulțimi A și B cu proprietatea din enunț astfel încât $|A\cup B|=n$.

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie B_1 și B_2 două puncte pe latura AC a triunghiului ABC, $B_1\in(B_2A)$ astfel încât $\sphericalangle ABB_1=\sphericalangle B_1BB_2=\sphericalangle B_2BC$, iar D și E punctele de intersecție dintre bisectoarea unghiului A cu dreptele BB_1, respectiv BB_2. Dacă B_1B_2ED este patrulater inscriptibil, arătați că punctele B_1, H, O, I și E sunt conciclice, unde H, O, I sunt ortocentrul, centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului înscris în triunghiul B_1B_2E.

NOTĂ :

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 3 ore.
3. Se acordă 30 minute pentru familiarizarea cu subiectele.