CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
martie 2025

SUBIECTE
proba de matematică
Clasa a X a

1. Arătați că nu există $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 3i$.

2. a) Să se arate că $(a+b)\lg\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq b\lg a + a\lg b,$ pentru orice $a,b \in (1,\infty)$.

   b) Fie $a,b \in (0,1)$, cu $a^2+b^2=1.$ Să se arate că $a\lg a + b\lg b + (a+b)\lg(a+b) \leq 0$.

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ ecuația

$2^{n-1}(z^n+1)=(z+1)^n$ are toate rădăcinile de același modul.

4.Spunem că o funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ are proprietatea P dacă

$f\left((f(x))^2+f(y)\right)=xf(x)+f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Dați exemplu de o funcție f cu proprietatea P pentru care $0 < f(2025) < 2026$.
b) Există funcții f cu proprietateea P, pentru care $f(2025) \geq 2026$? Justificați răspunsul!

NOTĂ :
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 3 ore.
3. Se acordă 30 minute pentru familiarizarea cu subiectele