

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NTmartie 2025

SUBIECTE
proba de matematică – individual
clasa a XI-a**Subiectul 1 (25 puncte)**

Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, cu $(AB - BA)^2 = O_3$. Demonstrați că:

$$\det(AB + BA) = \det(2AB).$$

Subiectul 2 (25 puncte)

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstrați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

- există $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = BC$ și $CB = O_n$;
- $A^2 = O_n$.

Subiectul 3 (25 puncte)

Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea :

$$5f(3x+1) - 2f(x-1) = 13x+10, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie șirurile cu termeni strict pozitivi $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_{n+1}^2 = (n+1)(a_n - a_{n+1})$, $\forall n \geq 1$ și

$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{2n} + \ln n$, $n \geq 1$. Verificați dacă șirul $x_n = a_n \cdot b_n$, $n \geq 1$ este convergent.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3,5 ore.