

**CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT**  
martie 2025

---

**SUBIECTE – clasa a XII-a**  
**proba de matematică**

1. Să se arate că  $\exists c \in [-1, 1]$  astfel încât  $\int_{-1}^1 \frac{\cos \pi x}{1 - a^x + a^{2x}} dx = \frac{a^c \cdot \cos \pi c}{1 - a^c + a^{2c}}$ ,  $a > 0, a \neq 1$ .

2. Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$ . Să se arate că dacă ecuația  $x + x + x + x = \hat{1}$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_n$  atunci ecuația  $x + x = \hat{1}$  nu are soluții în  $\mathbb{Z}_n$ .

3. Determinați funcțiile integrabile  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  care au proprietatea că

$$\int_0^x f(t) dt = (f(x))^{2025} + f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

4. Fie  $n$  un număr natural liber de pătrate și  $G$  un grup neabelian de ordinul  $n$ . Demonstrați că există două elemente din  $G$ , de același ordin, care nu comută.

**NOTĂ:**

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Se acordă 30 minute pentru familiarizarea cu subiectele.