

P1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural mai mare decât 1 și p un număr prim astfel încât $n \mid p-1$ și $p \mid n^3-1$. Demonstrați că $4p-3$ este pătrat perfect.

Soluție: Evident $n < p$. Din relația $p \mid n^3-1$ deducem $p \mid (n-1)(n^2+n+1) \Rightarrow p \mid n^2+n+1$. Fie $p = kn+1, k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $p \mid kn^2+n$ și $p \mid kn^2+kn+k$, de unde obținem $kn+1 \mid kn-n+k$, deci $kn+1 \mid -n+k-1$. Cum $kn+1 > |k-n-1|$, singura posibilitate este $k = n+1$. În acest caz $p = n^2+n+1$ și atunci $4p-3 = (2n+1)^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

P2. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$ și punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $BD=1$, $EC=2$ și $\angle DAE = 60^\circ$. Determinați lungimea segmentului DE .

Soluție: Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile AEC și

ABD și obținem $\frac{a}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{2}{\sin(60^\circ - \alpha)}$, respectiv

$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(30^\circ + \alpha)}$. Eliminăm a din cele două egalități și

rezultă $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(30^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

După efectuarea calculelor obținem $\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $\alpha = 15^\circ$ și atunci $a = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \sqrt{3}+1$.

Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ABC deducem $\frac{x+3}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$, de unde $x = \sqrt{3}$.

