

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

BAREME proba de matematică clasa a XI-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

c) Arătați că limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - nx_n)$ există și este finită.

Soluție.

a) Fie $f(x) = x - x^2 + x^3$. Pentru $x \in (0, 1)$, avem $f(x) = x - x^2 + x^3 = x - x^2(1 - x) < x$.

Deci $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$, șirul este strict descrescător.

Se demonstrează prin inducție matematică că șirul este mărginit inferior. Rezultă că șirul este convergent.

.....6 puncte

Fie l limita sa. Avem $l = l - l^2 + l^3 \Rightarrow l^2(l - 1) = 0$. Cum $x_1 < 1$, rezultă $l = 0$.

.....3 puncte

b) Folosim Lema Stolz-Cesàro pentru șirul cu termenul general $\frac{n}{1/x_n}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n(1 - x_n + x_n^2)} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - (1 - x_n + x_n^2)}{x_n(1 - x_n + x_n^2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1 - x_n + x_n^2)}{x_n - x_n^2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ puncte} \end{aligned}$$

Simplificăm cu x_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x_n + x_n^2}{1 - x_n} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$3 puncte

c) Fie $y_n = \frac{1}{x_n}$. Din punctul b) rezultă că $\frac{y_n}{n} \rightarrow 1$. Atunci $n(1 - nx_n) = n\left(1 - \frac{n}{y_n}\right) = nx_n \cdot (y_n - n)$

Deoarece $nx_n \rightarrow 1 \neq 0$, limita cerută există și este finită dacă și numai dacă șirul $z_n = y_n - n$ este convergent.

Cum $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{1 - x_n + x_n^2}$ obținem: $y_{n+1} - y_n = y_n \left(\frac{1}{1 - x_n + x_n^2} - 1 \right) = y_n \cdot \frac{x_n - x_n^2}{1 - x_n + x_n^2} = \frac{(1 - x_n)}{1 - x_n + x_n^2}$

Deci $y_{n+1} - y_n - 1 = \frac{-x_n^2}{1 - x_n + x_n^2}$3 puncte

Deoarece $x_n \rightarrow 0^+$, există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice $n \geq N$:

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

$0 < x_n < 1/2$, deci $1/2 < 1 - x_n + x_n^2 < 2$ și, prin urmare, $\frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2} < 2x_n^2$.

Din punctul b) există constanta $C > 0$ astfel încât $x_n \leq \frac{C}{n}$, pentru n suficient de mare (de exemplu, putem alege $C = 2$). Rezultă că există $N' \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice $n \geq N'$:

$$|y_{n+1} - y_n - 1| < 2 \left(\frac{C}{n}\right)^2 = \frac{2C^2}{n^2}.$$

Fie acum $m > k \geq N'$. Atunci

$$|z_m - z_k| = \left| \sum_{j=k}^{m-1} (y_{j+1} - y_j - 1) \right| \leq \sum_{j=k}^{m-1} \frac{2C^2}{j^2} \leq 2C^2 \cdot \sum_{j=k}^m \frac{1}{j^2}.$$

Deoarece șirul $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$, $n \geq 1$ este convergent, rezultă că șirul $(a_m - a_{k-1})$ converge către 0, adică

$\sum_{j=k}^m \frac{1}{j^2} \rightarrow 0$, când $k \rightarrow \infty$. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N'' \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, dacă

$m > k \geq N''$, atunci $|z_m - z_k| < \varepsilon$. Astfel șirul $(z_n)_{n \geq N''}$ este Cauchy, deci convergent.

Prin urmare, limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - nx_n)$ există și este finită.

.....4 puncte

Subiectul 2 (25 puncte)

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, cu $A \neq B$, astfel încât $A^2B = B^2A$ și $A^3 = B^3$. Arătați că

$$\det(AB^2A + A^2BA + A^2B^2 + A^4 + I_2) + \det(BA^2B + B^2AB + B^2A^2 + B^4 - I_2) = 2.$$

Gabriel Constantin, Roman

Soluție.

Din relația $A^2B = B^2A$, prin multiplicare la dreapta cu B , respectiv cu A , obținem $A^2B^2 = B^2AB$ și $B^2A^2 = A^2BA$ 3 puncte

Din relația $A^2B = B^2A$, prin multiplicare la stânga cu B , respectiv cu A , obținem $BA^2B = A^4$ și $B^4 = AB^2A$ 3 puncte

Cum $A^3 - B^3 - A^2B + B^2A = O_2$, rezultă $(A - B)(A^2 + B^2) = O_2$, (1). 4 puncte

Presupunând că $A^2 + B^2$ este inversabilă, din (1) obținem $A - B = O_2$, adică $A = B$, fals. Rezultă că $\det(A^2 + B^2) = 0$ 5 puncte

Notând $X = (A^2 + B^2)^2 = A^4 + A^2B^2 + B^2A^2 + B^4$, observăm că, pe de o parte putem scrie

$X = AB^2A + A^2BA + A^2B^2 + A^4$, iar pe de altă parte avem $X = BA^2B + B^2AB + B^2A^2 + B^4$. Identitatea care trebuie demonstrată devine $\det(X + I_2) + \det(X - I_2) = 2$, (2). 5 puncte

Cum $\det(X + I_2) + \det(X - I_2) = 2(\det(X) + \det(I_2))$ și $\det(X) = 0$, obținem (2). 5 puncte

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$, există

$t \in (x, y)$ astfel încât $g(t) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$;
- limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ există și este finită.

Cristi Săvescu, Focșani

Soluție.

Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, din faptul că g este crescătoare, deducem că $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

..... 3 puncte

Atunci, pentru orice $x < y$, avem $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g(t) \leq 0$4 puncte

Dar funcția f este crescătoare, deci $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$. Deducem atunci că f este constantă, deci limita

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ este finită. 4 puncte

Reciproc, dacă limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ este finită, atunci pentru orice $x < y$, exista $t \in (x, y)$ pentru care să

avem $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g(t) \geq g(x)$4 puncte

În această relație, pentru $y \rightarrow \infty$, obținem $g(x) \leq 0$. Cum x a fost ales aleator, avem $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$3 puncte

Atunci, pentru orice $x < y$, avem $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$ (pentru că f este crescătoare). Pe de altă parte, avem

$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g(t) \leq 0$, deci $f(x) = f(y)$4 puncte

Deducem că f este constantă, deci conform ipotezei, g se anulează în orice interval real. Cum g este crescătoare, rezultă că $g \equiv 0$ 3 puncte

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB^2A = AB + BA$. Demonstrați că $AB^2 = B^2A$ și $A^2B = BA^2$.

*Mihai Opincariu, Brad***Soluție.**

Din $AB^2A = AB + BA$ obținem $(AB - I_n)(BA - I_n) = I_n$, (1). **5 puncte**

Notând $BA - I_n = X$, vom avea $(AB - I_n)X = I_n$, relație care, multiplicată la stânga cu B , devine $(BAB - B)X = B$, adică $(BA - I_n)BX = B$. Multiplicând ultima relație la stânga cu $AB - I_n$ și ținând cont de (1), va rezulta $BX = (AB - I_n)B$, sau $B(BA - I_n) = (AB - I_n)B$, de unde rezultă că $AB^2 = B^2A$.

..... **10 puncte**

Pentru a demonstra a doua egalitate din enunț, observăm că din relația (1) reiese că matricele $AB - I_n$ și $BA - I_n$ sunt inversabile și $(BA - I_n)^{-1} = AB - I_n$, deci $(BA - I_n)(AB - I_n) = I_n$, (2).

Pe baza relației (2), raționând în mod analog, se obține că $A^2B = BA^2$.

..... **10 puncte**