

Subiectul 1 (25 puncte)

Fie $(G, \cdot)$ un grup având un singur automorfism. Arătați că:

- 1) G este grup comutativ;
- 2) $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$.

Soluție:

Fie a un element fixat din G . Vom arăta că funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = axa^{-1}$ este automorfism de grupuri.

.....5p

Fie $x_1, x_2 \in G$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1} \Rightarrow x_1a^{-1} = x_2a^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Prin urmare, funcția este injectivă.

Fie $y \in G$ astfel încât $f(x) = y$. Rezultă $axa^{-1} = y$, de unde $xa^{-1} = a^{-1}y$, ceea ce implică $x = a^{-1}ya$, adică surjectivitatea.

.....5p

Fie e elementul neutru al grupului și x, y două elemente din G .

$$f(xy) = a(xy)a^{-1}, \text{ iar}$$

$$f(x)f(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axeya^{-1} = a(xy)a^{-1}.$$

Rezultă că $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in G$, deci f este morfism.

Cum 1_G este automorfism al grupului G , iar grupul G are un singur automorfism, rezultă că $f = 1_G$. Drept urmare, $axa^{-1} = x, \forall x \in G$, de unde $ax = xa, \forall a, x \in G$.

.....5p

b) Considerăm funcția $g: G \rightarrow G, g(x) = x^{-1}$ și arătăm că este automorfism.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^{-1} = x_2^{-1} \Rightarrow e = x_1x_2^{-1} \Rightarrow ex_2 = (x_1x_2^{-1})x_2 \Rightarrow x_2 = x_1, \text{ adică injectivitatea.}$$

$$\text{Fie } y \in G. g(x) = y \Rightarrow x^{-1} = y \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y^{-1} \Rightarrow g \text{ surjectivă}$$

$$g(x_1x_2) = (x_1x_2)^{-1} = x_2^{-1} \cdot x_1^{-1} = x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} = g(x_1) \cdot g(x_2), \forall x_1, x_2 \in G.$$

Ca urmare a celor stabilite anterior, g este automorfism.

.....5p

La fel ca la punctul anterior, avem $g = 1_G$, adică $x^{-1} = x, \forall x \in G$, ceea ce conduce la $x^2 = e, \forall x \in G$.

..... 5p

SUBIECTUL 2.

Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm

$$I_n = \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}}} \cdot (1-x)^n dx.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(nI_n - 1) = -1$.

(Gazeta Matematică)

Soluție. Fie $n \geq 2$. Pentru orice $t \in [0, 1]$ avem inegalitățile

$$0 \leq 1 - \sqrt[n]{t} \leq 1 - t$$

Fie $x \in [0, 1]$. Atunci

$$0 \leq t = \frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}} \leq 1$$

și din inegalitatea precedentă

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \sqrt[n]{\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}}} \\ &\leq 1 - \frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}} \leq x^{n+1} \leq x^n. \end{aligned}$$

De aici avem:

$$0 \leq (1-x)^n - \sqrt[n]{\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}}} \cdot (1-x)^n \leq x^n \cdot (1-x)^n.$$

Cum $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ deducem că

$$0 \leq (1-x)^n - \sqrt[n]{\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}}} \cdot (1-x)^n \leq \frac{1}{4^n}.$$

Prin integrare rezultă că

$$0 \leq \frac{1}{n+1} - I_n \leq \frac{1}{4^n},$$

de unde

$$0 \leq \frac{n}{n+1} - nI_n \leq \frac{n}{4^n}$$

din teorema cleștelui avem $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 1$.

.....5p

De asemenea

$$0 \leq 1 - nI_n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{4^n}$$

de unde

$$\frac{n}{n+1} \leq n(1 - nI_n) \leq \frac{n^2}{4^n} + \frac{n}{n+1}$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - nI_n) = 1$, de unde rezultă concluzia.

.....5p

Subiect 3 (25 puncte)

Fie A un inel finit și comutativ. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) Există un unic $\alpha \in A$ cu $\alpha^2 + 1 = 0$;

(b) $1 + 1 = 0$ și pentru orice $a \in A$ există $b \in A$ cu $a = b^2$.

Soluție:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Din $\alpha^2 + 1 = 0$ avem și $(-\alpha)^2 + 1 = 0$ deci, din unicitate, avem $\alpha + \alpha = 0$, deci $\alpha(1 + 1) = 0$.

Prin înmulțire cu $-\alpha$, deducem $1 + 1 = 0$, deci singurul element α pentru care $\alpha^2 + 1 = 0$ este $\alpha = 1$, și în plus $1 + 1 = 0$.

.....5p

Demonstrăm că $x^2 = 0$ implică $x = 0$.

Fie $x \in A$ astfel încât $x^2 = 0$, de unde $(x + 1)^2 + 1 = x^2 + x + x + 1 + 1 = 0$, de unde $x + 1 = 1$, deci $x = 0$.

.....5p

Fie funcția $\phi : A \rightarrow A, \phi(x) = x^2$. Demonstrăm că ϕ e injectivă.

Dacă $x^2 = y^2$, atunci $0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$, deci $x + y = 0$, de unde $x = y$. Deci ϕ e injectivă și cum A este finit, ϕ e și surjectivă și deducem (b).

.....10p

(b) $\Rightarrow$ (a)

Avem că funcția ϕ definită mai sus e surjectivă și din moment ce A este finit, ϕ e de fapt bijectivă, deci există un unic element $x \in A$ cu $x^2 = 1$, adică $x^2 + 1 = 0$.

.....5p

SUBIECTUL 4.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval închis și mărginit din I , care verifică relația

$$\left| \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt \right| \leq \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

pentru oricare $x, y \in I$. Arătați că funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este derivabilă pe I , cu derivata continuă pe I . Este F o primitivă a lui f ?

(Dan Șt. Marinescu și Eugen Păltănea)

Soluție. Inegalitatea din ipoteză poate fi scrisă

$$\left| 2F\left(\frac{x+y}{2}\right) - F(x) - F(y) \right| \leq \frac{1}{4}(x-y)^2, \forall x, y \in I. \quad (1)$$

.....5p
Considerăm funcția $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^2}{2} - F(x)$. Din (1) obținem

$$\left| G(x) + G(y) - 2G\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{4}(x-y)^2 \right| \leq \frac{1}{4}(x-y)^2, \forall x, y \in I,$$

de unde

$$0 \leq G(x) + G(y) - 2G\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(x-y)^2, \forall x, y \in I. \quad (2)$$

.....5p
Deoarece $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă rezultă F este continuă pe I , funcția G este de asemenea continuă pe I . Atunci din inegalitatea din stânga din (2), deducem că G este convexă pe I . Rezultă că G are derivata finită la dreapta

$$G'_d(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{G(x+t) - G(x)}{t}$$

și derivata finită la stânga

$$G'_s(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{G(x+t) - G(x)}{t},$$

în orice punct $x \in I$. În plus, $G'_s(x) \leq G'_d(x), \forall x \in I$.

Fie $x \in I$, arbitrar. Există $r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset I$. Din relația (2) obținem

$$0 \leq \frac{G(x+t) - G(x)}{t} - \frac{G(x) - G(x-t)}{t} \leq 2t, \forall t \in (0, r). \quad (3)$$

Rezultă

$$0 \leq \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{G(x+t) - G(x)}{t} - \frac{G(x) - G(x-t)}{t} \right) \leq 0,$$

de unde $G'_s(x) = G'_d(x)$, deci G este derivabilă în x . Cum x este arbitrar, funcția G este derivabilă pe I . Notăm că G' este monoton crescătoare pe I , conform convexității. Analog, funcția $H : I \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \frac{x^2}{2} + F(x)$ este convexă și derivabilă pe I , cu H' monoton crescătoare pe I .

.....5p

Atunci, F este derivabilă pe I , cu derivata

$$F'(x) = x - G'(x) = H'(x) - x, \forall x \in I. \quad (4)$$

Pentru a proba continuitatea funcției $F' : I \rightarrow \mathbb{R}$, este suficient să demonstrăm relația

$$|F'(x) - F'(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in I. \quad (5)$$

Fie $\forall x, y \in I$. Putem presupune $x \leq y$. Din (4) obținem

$$F(y) - F(x) = (y - x) + |G'(x) - G'(y)| \leq y - x = |y - x|$$

și

$$F(x) - F(y) = (y - x) + |H'(x) - H'(y)| \leq y - x = |y - x|,$$

de unde rezultă $|F'(x) - F'(y)| \leq |x - y|$.

.....5p

Funcția F este o primitivă a funcției f dacă și numai dacă f este continuă pe I . Ipoteza problemei nu asigură însă continuitatea funcției f . Contraexemplu:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \in I \setminus \{a\} \end{cases}$$

satisface condițiile din enunț, dar $F'(a) = 0 \neq 1 = f(a)$.

.....5p