



Țăruș (tarus)

Autor: Alex-Robert David

Contributor(i): Alex-Robert David, Alexandra-Ioana Moroz

Soluție

Subtask 1

Pentru început, amintim formula de calcul a ariei unui triunghi cunoscând coordonatele vârfurilor $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ și $P_3(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Să presupunem că punctele P_1 și P_2 sunt date, și ne propunem să găsim dreapta pe care se află punctul P_3 .

$$x_3 \cdot (y_1 - y_2) + y_3 \cdot (x_2 - x_1) + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = \pm 2A$$

Notăm cu $A = y_1 - y_2$, $B = x_2 - x_1$ și $C = \pm 2A - x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$. Atunci P_3 se află pe dreapta de ecuație

$$A \cdot x + B \cdot y = C$$

Cum A , B și C sunt întregi, iar x_3 și y_3 sunt întregi, știm că această ecuație are soluții dacă și numai dacă C este divizibil cu (A, B) , unde (A, B) este cel mai mare divizor comun al numerelor A și B . Avem astfel condiția de existență în cazul în care poligonul este triunghi. Putem obține o soluție folosind algoritmul extins al lui Euclid, oricare soluție fiind corectă deoarece un triunghi este convex prin definiție.

Notă

Aceste observații stau la baza soluției complete, motiv pentru care acest subtask a primit un punctaj generos.

Subtask 2

Pentru acest subtask, vectorul de poziție al lui P_4 se poate scrie ca:

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_3 - (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

Subtask 3

Pentru soluția completă, pornim de la formula de calcul a ariei unui poligon cu N vârfuri:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

unde $x_{N+1} = x_1$ și $y_{N+1} = y_1$.

Similar cu soluția pentru cazul $N = 3$, vom ajunge la o ecuație de tipul $A \cdot x + B \cdot y = C$ pe care punctul P_N trebuie să o satisfacă.

Putem obține o soluție x_0, y_0 folosind algoritmul extins al lui Euclid, pentru ecuația $A \cdot x + B \cdot y = d$, unde $d = (A, B)$

Vom introduce o variabilă t după care vom exprima coordonatele punctului P_N astfel:

$$\begin{cases} x_N = x_0 \cdot \frac{C}{d} + t \cdot \frac{B}{d} \\ y_N = y_0 \cdot \frac{C}{d} - t \cdot \frac{A}{d} \end{cases} \quad (1)$$

Pentru a satisface condiția de convexitate, amintim formula de calcul a produsului vectorial:

$$f(P_1, P_2, P_3) = (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_1)$$

Condiția de convexitate se exprimă astfel:

$$\begin{cases} f(P_{N-2}, P_{N-1}, P_N) > 0 \\ f(P_{-1}, P_N, P_1) > 0 \\ f(P_N, P_1, P_2) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

În aceste funcții vom înlocui coordonatele x_N și y_N cu formulele din ecuația 1 și se constată că sunt liniare în variabila t , deci putem scrie fiecare dintre inegalități ca $f(t) = Mt + N > 0$, unde M și N sunt constantele rămase. Din această inegalitate putem exprima limite superioare și inferioare pentru t în funcție de semnul lui M .

Cu aceste limite pentru t , putem alege oricare valoare întreagă din interval (dacă există valori întregi) pentru a calcula coordonatele x_N și y_N .