

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a XI-a**Subiectul 1 (25 puncte)**

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

c) Arătați că limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - nx_n)$ există și este finită.

Subiectul 2 (25 puncte)

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, cu $A \neq B$, astfel încât $A^2B = B^2A$ și $A^3 = B^3$. Arătați că

$$\det(AB^2A + A^2BA + A^2B^2 + A^4 + I_2) + \det(BA^2B + B^2AB + B^2A^2 + B^4 - I_2) = 2.$$

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$, există

$t \in (x, y)$ astfel încât $g(t) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$;

ii) limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ există și este finită.

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB^2A = AB + BA$. Demonstrați că $AB^2 = B^2A$ și $A^2B = BA^2$.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 3 ore.