

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

SUBIECTE
proba de matematică
clasa a XII a**Subiectul 1 (25 puncte)**

Fie $(G, \cdot)$ un grup având un singur automorfism. Arătați că:

- 1) G este grup comutativ;
- 2) $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$.

Subiectul 2 (25 puncte)

Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm

$$I_n = \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1}}} \cdot (1-x)^n dx.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n \cdot I_n - 1) = -1$.

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie A un inel finit și comutativ. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) Există un unic $\alpha \in A$ cu $\alpha^2 + 1 = 0$;
- (b) $1 + 1 = 0$ și pentru orice $a \in A$ există $b \in A$ cu $a = b^2$.

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval închis și mărginit din I , care verifică relația

$$\left| \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt \right| \leq \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

pentru oricare $x, y \in I$. Arătați că funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este derivabilă pe I , cu derivata continuă pe I . Este F o primitivă a lui f ?

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026
