

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT
 martie 2026

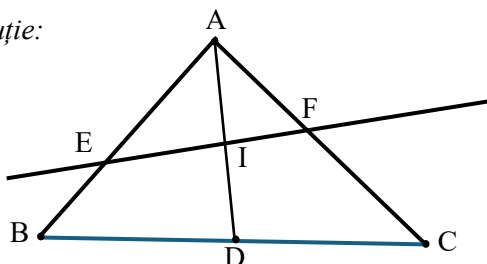
SUBIECTE SI BAREME
proba de matematică
clasa a IX-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Prin punctul de intersecție al bisectoarelor interioare se duce o dreaptă variabilă care intersectează laturile AB și AC în punctele E , respectiv F . Să se arate că: $\left(\frac{EB}{EA}\right)^2 + \left(\frac{FC}{FA}\right)^2 \geq 1$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluție:



Din teorema transversalei avem: $\frac{EB}{EA} \cdot DC + \frac{FC}{FA} \cdot BD = \frac{ID}{IA} \cdot BC$. Utilizând teorema bisectoarei, obținem:

$$b \cdot \frac{EB}{EA} + c \cdot \frac{FC}{FA} = a \quad (1) \dots\dots\dots 10p$$

Din inegalitatea lui Cauchy avem: $(b^2 + c^2) \cdot \left(\left(\frac{EB}{EA}\right)^2 + \left(\frac{FC}{FA}\right)^2 \right) \geq \left(b \cdot \frac{EB}{EA} + c \cdot \frac{FC}{FA} \right)^2 \quad (2) \dots\dots\dots 10p$

Din (1) și (2) rezultă $(b^2 + c^2) \cdot \left(\left(\frac{EB}{EA}\right)^2 + \left(\frac{FC}{FA}\right)^2 \right) \geq a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{EB}{EA}\right)^2 + \left(\frac{FC}{FA}\right)^2 \geq 1 \dots\dots\dots 5p$

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Subiectul 2 (25 puncte)

Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația: $\frac{1}{x^2 - 3x + 4} + \frac{1}{y^2 - 3y + 4} = \frac{1}{\sqrt{4x - 4}} + \frac{1}{\sqrt{4y - 4}}$.

*Cristinel Mortici, Viforâta**Soluție:*Condiții de existență: $x > 1, y > 1$.Avem: $x^2 - 3x + 4 \geq x \geq \sqrt{4x - 4}$ cu egalități dacă și numai dacă $x = 2$ 10pAnalog pentru y , deci

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 4} + \frac{1}{y^2 - 3y + 4} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{4x - 4}} + \frac{1}{\sqrt{4y - 4}} \text{10p}$$

cu egalități dacă și numai dacă $x = y = 2$.Astfel ecuația are soluția unică $(x, y) = (2, 2)$ 5p**Subiectul 3 (25 puncte)**

Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ astfel încât $m \cdot f(m) + n$ se divide cu $m^2 + f(n)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

*Cătălin Barbu, Lucian Lazăr, Bacău**Soluție:*1) Demonstrăm că $f(m) \geq m, \forall m \in \mathbb{N}^*$.Considerăm $n = m, m \in \mathbb{N}^*$ și obținem $m^2 + f(m) \mid m \cdot f(m) + m$.Deoarece $m^2 + f(m)$ și $m \cdot f(m) + m$ sunt strict pozitiverezultă $m^2 + f(m) \leq m \cdot f(m) + m, \forall m \in \mathbb{N}^*$.Obținem $m^2 - m \leq m \cdot f(m) - f(m) \Leftrightarrow m(m - 1) \leq f(m)(m - 1)$.Dacă $m \geq 2$, rezultă $m \leq f(m), \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.Dacă $m = 1$, rezultă $0 \leq 0$.În concluzie $f(m) \geq m, \forall m \in \mathbb{N}^*$ 10p2) Demonstrăm că $f(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Considerăm $m = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ și se obține

$$f^2(n) + f(n) \mid f(n) \cdot f(f(n)) + n \Leftrightarrow f(n)(f(n) + 1) \mid f(n) \cdot f(f(n)) + n.$$

Obținem $f(n) \mid f(n) \cdot f(f(n)) + n \Rightarrow f(n) \mid n$. Cum $f(n) \in \mathbb{N}^*$ rezultă $f(n) \leq n$ 10p

Din 1) și 2) rezultă $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 5p

Subiectul 4 (25 puncte)

Dacă $H_a H_b H_c$ este triunghiul ortic corespunzător unui triunghi ABC , iar H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor $AH_b H_c$, $BH_c H_a$ respectiv $CH_a H_b$, atunci dreptele $H_a H_1, H_b H_2$ și $H_c H_3$ sunt concurente.

Cătălin Barbu, Lucian Lazăr, Bacău

Soluție:

Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Deoarece $HH_c \perp AB$ și $H_a H_2 \perp AB$ rezultă $H_a H_2 \parallel HH_c$5p

Analog, $H_a H \parallel H_2 H_c$, de unde obținem că $H_a H_2 \equiv HH_c$.

Analog se arată că $H_b H_1 \equiv HH_c$, deci $H_b H_1 \equiv H_a H_2$ (1).....5p

Deoarece $H_b H_1 \perp AB$ și $H_a H_2 \perp AB$, rezultă că $H_b H_1 \parallel H_a H_2$ (2).5p

Din relațiile (1) și (2) rezultă că patrulaterul $H_b H_1 H_2 H_a$ este paralelogram, deci dreapta $H_a H_1$ trece prin punctul D , mijlocul segmentului $H_b H_2$ 5p

Analog se arată că și dreapta $H_c H_3$ trece prin mijlocul segmentului $H_b H_2$, deci dreptele $H_a H_1, H_b H_2$ și $H_c H_3$ sunt concurente.5p