

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Barem de corectare și notare proba de matematică clasa a X-a

Subiectul 1 (25 puncte)

Determinați numerele complexe z pentru care $4|z^2 + 2z + 4| + |z^3| \leq 8$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție și barem: Avem

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4) \Rightarrow 8 = |8 - z^3 + z^3| \leq |8 - z^3| + |z^3| = |z^3| + |2 - z| \cdot |z^2 + 2z + 4|.$$

Conform ipotezei rezultă că

$$4|z^2 + 2z + 4| + |z^3| \leq 8 \leq |z^3| + |2 - z| \cdot |z^2 + 2z + 4| \Rightarrow 4|z^2 + 2z + 4| \leq |2 - z| \cdot |z^2 + 2z + 4| \quad (1).$$

.....10 puncte

Cazul I: $|z^2 + 2z + 4| = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0 \Rightarrow z \in \{-1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$. Ambele numere verifică inegalitatea din ipoteză.....8 puncte

Cazul II: $|z^2 + 2z + 4| > 0$. Din relația (1) rezultă

$$|z - 2| \geq 4 \Rightarrow 4 \leq |z| + 2 \Rightarrow 2 \leq |z| \Rightarrow |z|^3 \geq 8 \Rightarrow |z^3| + 4|z^2 + 2z + 4| > 8, \text{ contradicție.}$$

În concluzie, numerele care verifică ipoteza sunt $z = -1 - i\sqrt{3}$ și $z = -1 + i\sqrt{3}$ 7 puncte

Subiectul 2 (25 puncte)

Determinați soluțiile reale ale sistemului
$$\begin{cases} 2^x + 3^{\frac{1}{y}} = 5 \\ 2^y + 3^{\frac{1}{x}} = 5 \end{cases}.$$

Mihai Opincariu, Brad

Soluție și barem: Dacă, prin absurd, $y < 0$ atunci $5 = 2^x + 3^{\frac{1}{y}} < 2^x + 3^0$, deci $4 < 2^x$ și rezultă $2 < x$.

Vom avea că $5 = 2^y + 3^{\frac{1}{x}} < 2^y + 3^{\frac{1}{2}} < 2^y + 3$, deci $2 < 2^y$ sau $1 < y$ contradicție.

Va rezulta că $y > 0$ și analog obținem că $x > 0$ 7 puncte

Scăzând cele două ecuații ale sistemului rezultă $2^x - 2^y = 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{y}}$, adică $2^y(2^{x-y} - 1) = 3^{\frac{1}{y}}\left(3^{\frac{y-x}{xy}} - 1\right)$.

Dacă, prin absurd, $x \neq y$ atunci expresiile $x - y$ și $\frac{y-x}{xy}$ vor avea semne contrare, ceea ce

contravine relației de mai sus. Obținem astfel că $x = y$ 8 puncte

Rămâne să rezolvăm ecuația $2^x + 3^{\frac{1}{x}} = 5$, unde $x > 0$, ().*

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NT

martie 2026

Cum funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ este strict crescătoare și strict convexă, iar funcția

$g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ este strict convexă reiese că $f \circ g$ este strict convexă.

De asemenea funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2^x$ este strict convexă. Va rezulta astfel că funcția

$h + f \circ g$ este strict convexă, deci ecuația (*) admite cel mult două soluții. Cum 1 și $\log_2 3$ verifică (*), obținem soluțiile $x = y = 1$ și $x = y = \log_2 3$ **10 puncte**

Subiectul 3 (25 puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se arate că

$$\sqrt[n]{n!} + \sqrt[n]{\log_2(n+2)} \leq \sqrt[n]{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}.$$

Soluție și barem: Inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}} + \sqrt[n]{\frac{\log_2(n+2)}{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}} \leq 1$$

(1) **5 puncte**

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică a n numere reale pozitive obținem:

$$\sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}} \leq \frac{\frac{1}{1+\log_2 3} + \frac{2}{2+\log_3 4} + \cdots + \frac{n}{n+\log_{n+1}(n+2)}}{n} \quad (2),$$

..... **8 puncte**
respectiv

$$\sqrt[n]{\frac{\log_2(n+2)}{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}} = \sqrt[n]{\frac{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdots \log_{n+1}(n+2)}{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4) \cdots (n+\log_{n+1}(n+2))}} \leq \frac{\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3} + \frac{\log_3 4}{2+\log_3 4} + \cdots + \frac{\log_{n+1}(n+2)}{n+\log_{n+1}(n+2)}}{n} \quad (3) \text{ } \mathbf{8 \text{ puncte}}$$

Prin adunarea inegalităților (2) și (3) obținem inegalitatea (1) **4 puncte**

Subiectul 4 (25 puncte)

Fie $n \geq 2$ un număr natural și S mulțimea funcțiilor bijective $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Pentru

fiecare $f \in S$, notăm cu $p_f = \sum_{k=1}^n |f(k) - k|$. Determinați $P = \{p_f \mid f \in S\}$.

Cristi Săvescu, Focșani

Soluție și barem: Avem $p_f = \sum_{k=1}^n |f(k) - k| \equiv \sum_{k=1}^n (f(k) - k) \equiv 0 \pmod{2}$, deci p_f este număr par,

pentru orice $f \in S$ (1)..... **5 puncte**

CONCURSUL PLURIDISCIPLINAR PROSOFT@NTmartie 2026

Fie $f_0(x) = x$ și $f_1(x) = n+1-x$. Valoarea minimă este $\min p_f = 0$, care se obține când $f = f_0$ **2 puncte**

Demonstrăm că p_f este maxim pentru $f = f_1$. Într-adevăr, dacă pentru $f \in S$ există $i < j$ pentru care $f(i) < f(j)$, atunci funcția f' care pleacă de la f și interschimbă valorile $f(i)$ și $f(j)$ are proprietatea că $p_{f'} \geq p_f$. Pentru a demonstra acest lucru, considerăm funcția $q: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$, definită prin $q(x) = |x-i| - |x-j|$. Studiind monotonia sa pe fiecare dintre intervalele $[1, i], [i, j], [j, n]$, observăm că q este crescătoare, deci $q(f(i)) \leq q(f(j))$. Atunci

$|f(i)-i| - |f(i)-j| \leq |f(j)-i| - |f(j)-j|$, deci $p_{f'} - p_f \geq 0$. Deducem că valoarea maximă a lui

p_f este $\max p_f = \sum_{k=1}^n |n+1-2k| = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = 2t$ (2)..... **10 puncte**

Schimbul a două valori vecine modifică p_f cu maxim 2 unități. Într-adevăr, dacă x și y sunt pe pozițiile $(i, i+1)$ și ajung pe pozițiile $(i+1, i)$, atunci

$\Delta p_f(i) = |x-i| + |y-(i+1)| - |x-(i+1)| - |y-i|$. Dar $|x-i| - |x-(i+1)| \in \{-1, 1\}$ și

$|y-(i+1)| - |y-i| \in \{-1, 1\}$, de unde rezultă afirmația. Cum de la orice permutare din S se poate ajunge la oricare alta printr-o succesiune finită de schimburi a două valori vecine, deducem că dacă $2a, 2b \in P$, atunci $2c \in P$, pentru orice $c \in [a, b]$.

Din (1), (2) și (3) avem $P = \{0, 2, 4, \dots, 2t\}$ **8 puncte**